Jürgen Blaich

MÖGLICHKEITEN UND GRENZEN DER MODELLE DER PORTFOLIO SELECTION

-dargestellt an einigen Beispielen aus der Bundesrepublik Deutschland-

1970

1971

MÖGLICHKEITEN UND GRENZEN DER MODELLE DER PORTFOLIO SELECTION

- dargestellt an einigen Beispielen aus der Bundesrepublik Deutschland -

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaft
durch den Fachbereich
Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
der Westfälischen Wilhelms-Universität
zu Münster

vorgelegt von
Dipl.-Volksw. Jürgen Blaich
aus Stuttgart
1971

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Erster Berichterstatter: Prof. Dr. Bleymüller
Zweiter Berichterstatter: Prof. Dr. Gülicher
Dekan: Prof. Dr. Bleymüller
Tag der mündlichen Prüfung: 17. Dez. 1970

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1. EINFÜHRUNG	1
1.1 Problemstellung	1
1.2 Übersicht über den Aufbau der Arbeit	5
1.3 Definition der grundlegenden Begriffe	8
1.3.1 Der Begriff des Portefeuilles	8
1.3.2 Maßgrößen, Algorithmen, Nebenbedingungen von Modellen	9
1.3.3 Der Begriff des Portfolio Selection-Modells	12
2. THEORETISCHER ÜBERBLICK ÜBER EINIGE MODELLE DER PORTFOLIO SELECTION	15
2.1 Das Modell von MARKOWITZ	15
2.1.1 Die Voraussetzungen	15
2.1.2 Die Zusammenhänge zwischen einzelnen Wertpapieren und Portefeuilles	18
2.1.3 Die "Effizienz" von Portefeuilles	21
2.1.4 Geometrische Analyse E,V-effizienter Portefeuilles	22
2.1.5 Die "Kritische Linienmethode"	34
2.2 Das Modell von SHARPE	46
2.3 Das Multi-Index-Modell der Kovarianzform ...	54
2.4 Das Multi-Index-Modell der Diagonalform	57
3. DIE EINGABEDATEN FÜR MODELLE DER PORTFOLIO SELECTION	60
3.1 Eine retrospektive Betrachtung der Erträge ausgewählter Aktien	60
3.2 Die zeitliche Stabilität von Kovarianzen und Korrelationskoeffizienten bei Aktienerträgen	62

Seite

3.3 Finanzanalytische Gesichtspunkte zur Ertragsprognose 66

4. DARSTELLUNG DER BENUTZTEN PROGRAMME ZU MODELLEN DER PORTFOLIO SELECTION 69

4.1 Ein selbstentwickeltes Programm zum Modell von MARKOWITZ auf einer IBM/360 69

4.2 Ein Programm zum Modell von SHARPE auf einer IBM/1401 73

5. BETRACHTUNG DER NUMERISCHEN ERGEBNISSE DER MODELLE 78

5.1 Darstellung der Ergebnisse des Modells von MARKOWITZ 78

5.2 Darstellung der Ergebnisse des Modells von SHARPE 83

5.3 Kritischer Vergleich der Modellergebnisse untereinander und mit der tatsächlich eingetretenen Entwicklung 91

5.4 Schlußfolgerungen aus den Ergebnissen 103

6. DIE ANWENDUNGEN DER MODELLE IN DER ANLAGEPRAXIS 108

6.1 Zeit- und Kostenschätzungen bei Verwendung der benutzten Computerprogramme zur Portfolio Selection 108

6.2 Bisherige und zukünftige Anwendungen von Modellen der Portfolio Selection 111

7. ZUSAMMENFASSUNG UND SCHLUSS 114

LITERATURHINWEISE 118

ANHANG 1*

VERZEICHNIS DER ABBILDUNGEN III

VERZEICHNIS DER TABELLEN IV

VERZEICHNIS DER TABELLEN IM ANHANG VI

VERZEICHNIS DER ABBILDUNGEN

		Seite
Abb. 2-1:	Linien gleicher Portefeuilleerträge	23
Abb. 2-2:	Isovarianzlinien	25
Abb. 2-3:	Kritische Linien, Isoertrags- und Isovarianzlinien	27
Abb. 2-4:	Die "Kritische Linienmethode"	29
Abb. 2-5:	Erwarteter Ertrag und zugehörige Varianz entlang einer kritischen Linie	32
Abb. 2-6:	Die Menge der effizienten E,V-Kombinationen	33
Abb. 2-7:	Einige Beziehungen des einfachen Indexmodells	49
Abb. 4-1:	Allgemeiner Programmablaufplan des IBM--1401-Portfolio Selection-Programms	75
Abb. 5-1:	Streubereich für die Renditen der durch ihre jeweilige Rendite gemessenen Portefeuilles	90

VERZEICHNIS DER TABELLEN

Seite

Tabelle 3-1: Korrelationskoeffizienten von 40 ausgewählten Aktienerträgen während der Jahre vom 31. 12. 1954 bis zum 31. 12. 1963 63

Tabelle 5-1: Erwartete Renditen, zugehörige Risiken und deren prozentuale auf das jeweilige Minimum bezogene Steigerungen von Eckportefeuille zu Eckportefeuille (Modell MARKOWITZ 1963) 80

Tabelle 5-2: Erwartete Renditen, zugehörige Risiken und deren prozentuale auf das jeweilige Minimum bezogene Steigerungen von Eckportefeuille zu Eckportefeuille (Modell MARKOWITZ 1962) 82

Tabelle 5-3: Erwartete Renditen, zugehörige Risiken und deren prozentuale auf das jeweilige Minimum bezogene Steigerungen von Eckportefeuille zu Eckportefeuille (Modell MARKOWITZ 1965) 84

Tabelle 5-4: Erwartete Renditen, zugehörige Risiken und deren prozentuale Steigerungen bezüglich ihrer Minimalwerte von Eckportefeuille zu Eckportefeuille (Modell SHARPE 1962) 86

Seite

Tabelle 5-5: Erwartete Renditen, zugehörige Risiken und deren prozentuale auf das jeweilige Minimum bezogene Steigerungen von Eckportefeuille zu Eckportefeuille (Modell SHARPE 1965) 89

Tabelle 5-6: Vergleich der Ende 1963 mit dem Modell von MARKOWITZ geschätzten Portefeuillerenditen mit den tatsächlichen Renditen von Ende 1964 92

Tabelle 5-7: Vergleich der Ende 1962 mit dem Modell von MARKOWITZ geschätzten Portefeuillerenditen mit den tatsächlichen Renditen von Ende 1963 94

Tabelle 5-8: Vergleich der Ende 1965 mit dem Modell von MARKOWITZ geschätzten Portefeuillerenditen mit den tatsächlichen Renditen von Ende 1966 95

Tabelle 5-9: Vergleich der Ende 1962 mit dem Modell von SHARPE geschätzten Portefeuillerenditen mit den tatsächlichen Renditen von Ende 1963 97

Tabelle 5-10: Vergleich der Ende 1965 mit dem Modell von SHARPE geschätzten Portefeuillerenditen mit den tatsächlichen Renditen von Ende 1966 98

Tabelle 5-11: Gegenüberstellung der zum Jahresende 1963 mit den Modellen von MARKOWITZ und SHARPE geschätzten Portefeuillerenditen und deren Differenzen zu den retrospektiv ermittelten echten Renditen 100

Seite

Tabelle 5-12: Gegenüberstellung der zum Jahresende 1965 mit den Modellen von MARKOWITZ und SHARPE geschätzten Portefeuillerenditen und deren Differenzen zu den retrospektiv ermittelten echten Renditen 102

VERZEICHNIS DER TABELLEN IM ANHANG

Tabelle 1*: Kurztitel der am Jahresende 1953 dem Nominalkapital nach größten deutschen Aktiengesellschaften 2*

Tabelle 2*: Erträge von vierzig deutschen Aktiengesellschaften für die Jahre von 1954 bis 1967. Die Erträge wurden als Faktor des Vorjahresertrages ausgedrückt 5*

Tabelle 3*: Anwendung des Modells von MARKOWITZ auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung zum Jahresende 1964; Zeitraum von Ende 1963 bis Ende 1964 ..... 8*

Tabelle 4*: Anwendung des Modells von MARKOWITZ auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung zum Jahresende 1964 ..... 9*

Tabelle 5*: Anwendung des Modells von MARKOWITZ auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung zum Jahresende 1963; Zeitraum von Ende 1962 bis Ende 1963 . 11*

Seite

Tabelle 6*: Anwendung des Modells von MARKOWITZ auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung zum Jahresende 1963 ..... 12*

Tabelle 7*: Anwendung des Modells von MARKOWITZ auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung zum Jahresende 1966; Zeitraum von Ende 1965 bis Ende 1966 ..... 14*

Tabelle 8*: Anwendung des Modells von MARKOWITZ auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung zum Jahresende 1966 ..... 15*

Tabelle 9*: Anwendung des Modells von SHARPE auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung über den Aktienindex des Statistischen Bundesamtes zum Jahresende 1963; Zeitraum von Ende 1962 bis Ende 1963 ..... 16*

Tabelle 10*: Anwendung des Modells von SHARPE auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung über den Aktienindex des Statistischen Bundesamtes zum Jahresende 1963 ..... 17*

Seite

Tabelle 11*: Anwendung des Modells von SHARPE auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung über den Aktienindex des Statistischen Bundesamtes zum Jahresende 1966; Zeitraum von Ende 1965 bis Ende 1966 ..... 20*

Tabelle 12*: Anwendung des Modells von SHARPE auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung über den Aktienindex des Statistischen Bundesamtes zum Jahresende 1966 ..... 21*

Tabelle 13*: FORTRAN-IV-Programm zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ 28*

1. EINFÜHRUNG

1.1 Problemstellung

Nicht zuletzt durch das Vordringen von Investmentgesellschaften wird mehr und mehr versucht, das Kapitalanlageproblem einer wissenschaftlichen Behandlung zugänglich zu machen. Da die Kapitalanlage ein bewußtes Wählen zwischen mehreren Alternativen erfordert, spricht man von Entscheidungen.[1)]

Zur Lösung von Entscheidungsproblemen sind in den letzten zwanzig Jahren neue Verfahren und Modelle entwickelt worden, so auch für das Problem einer r a t i o n a l e n Kapitalanlage. Rational handeln heißt zielbewußt handeln. Zielbewußt handeln kann ein "Entscheidungssubjekt"[2)] oder Entscheidungsträger aber nur, wenn bei ihm über die anzustrebenden Ziele Klarheit besteht. Da in konkreten Entscheidungssituationen - hier ist es die rationale Kapitalanlage - im allgemeinen mehrere Handlungsalternativen zur Verfügung stehen, erfordert rationales Handeln einen bewertenden Vergleich der Handlungsfolgen hinsichtlich der gesetzten Ziele. Ein rational handelndes Entscheidungssubjekt, in unserem Falle ein Kapitalanleger oder Investor, vollzieht also einen Entscheidungsprozeß.

Dieser Entscheidungs- oder auch Planungsprozeß besteht aus

---

1) Vgl. E. HEINEN: Das Zielsystem der Unternehmung, Grundlage betriebswirtschaftlicher Entscheidungen, Wiesbaden 1966, S. 18.

2) Vgl. E. HEINEN: Loc. cit., S. 19.

mehreren Phasen;[1] die Phasen oder Stufen können je nach Art des Wahlproblems z. B. folgende sein:

a) Zielbildung (Anregungsphase),
b) Sammlung und Analyse der Handlungsalternativen:
   α) Suche nach Handlungsmöglichkeiten,
   β) Erfassung und Prognose der Daten,
c) Planungsrechnung (Optimierungsphase),
d) Entscheidung.

Diese Stufen des Entscheidungsprozesses sollen im folgenden etwas näher erläutert werden, und zwar bezogen auf das Problem der optimalen Kapitalanlage.

Bei der Zielbildung muß der Kapitalanleger aus seinen allgemeinen Handlungsmotiven ökonomisch faßbare Ziele ableiten. Als mögliche Anlageziele eines Investors seien hier genannt: Kapitalwachstum, hohe Erträge, Sicherheit der Erträge, Machtausübung; selbstverständlich läßt sich dieser Zielkatalog noch beträchtlich erweitern.[2] Bei der Aufstellung dieser Ziele werden Investoren von vielen Faktoren wie z. B. ihren Lebensumständen beeinflußt, und zwar unabhängig davon, ob ihnen das bewußt wird oder nicht.

Die Suche nach Handlungsmöglichkeiten besteht in dem Problem, alle Möglichkeiten der Kapitalanlage zu erfassen; es handelt sich hierbei um die artmäßige Auswahl der Investitionsobjekte. Stehen diese Alternativen einmal fest, dann geht es darum, bezüglich der einzelnen Handlungsalternativen Prognosedaten zu bekommen. Es müssen die Zu-

---

1) Vgl. E. HEINEN: Loc. cit., S. 21, vgl. zum formalen Aufbau des Entscheidungsprozesses auch H. KOCH: Betriebliche Planung, Grundlagen und Grundfragen der Unternehmungspolitik, Wiesbaden 1961, S. 77-91. Vgl. dazu auch G. GÄFGEN: Theorie der wirtschaftlichen Entscheidung, Untersuchungen zur Logik und ökonomischen Bedeutung des rationalen Handelns, 2. durchgesehene und erweiterte Auflage, Tübingen 1968, S. 101.

2) Vgl. dazu: E. HEINEN: Einführung in die Betriebswirtschaftslehre, Wiesbaden 1968, S. 106ff und E. HEINEN: Das Zielsystem ..., loc. cit., S. 59ff, sowie H. KOCH: Loc. cit., S. 15ff.

kunftsaussichten der einzelnen Kapitalanlagemöglichkeiten bestimmt werden. Hierbei handelt es sich um ein Informationsproblem, das u. U. erhebliche Kosten verursacht. Die Planungsrechnung soll sichtbar machen, wie sich die einzelnen Handlungsalternativen ökonomisch auswirken. Sie soll aufzeigen, wie der Zielbeitrag der einzelnen Handlungsalternativen aussieht; d. h. sie soll die einzelnen Handlungsmöglichkeiten bezüglich der Ziele bewerten. Die Planungsrechnung oder Optimierungsphase bietet also Verfahren an, die die zu treffende Entscheidung erleichtern. Bei der Entscheidung selbst wirken sich neben den vorgelagerten Phasen noch viele nicht weiter erfaßbare Faktoren (Imponderabilien) aus. Entscheidend für den Aufbau und die Durchführung eines konkreten Entscheidungsprozesses ist es, ob diese Entscheidung von einer Einzelperson oder von einer Gruppe getroffen wird,bei Gruppenentscheidungen tritt zusätzlich das Problem der Organisation[1] des Entscheindungsprozesses auf. Damit zusammenhängende Fragen sollen aber nicht Gegenstand dieser Arbeit sein.

Alle Investitionsentscheidungen erstrecken sich in die Zukunft und sind daher Entscheidungen unter Unsicherheit.[2] Es gibt mehrere Vorstellungen über die Entwicklung der Zukunft, die der Entscheidungsträger als unterschiedlich wahrscheinlich ansieht; d. h. die Prognosen können erheblich von der später eintretenden Entwicklung abweichen. Durch die Unsicherheit entstehen zunächst auf der Stufe der Zielbildung zusätzliche Probleme, nämlich die Berücksichtigung der Unsicherheit in der Zielgröße. Die Zielgröße kann jetzt nicht mehr einfach Ertragserzielung sein, sondern sie ist um ein Risikomaß zur Berücksichtigung der Unsicherheit zu erweitern.

---

1) Vgl. dazu: E. HEINEN: Das Zielsystem ..., loc. cit., S. 187ff.

2) Vgl. H. KOCH: Loc. cit., S. 106ff.

Es bestehen in diesem Falle folgende Optimierungsmöglichkeiten: Entweder wird ein Ziel zur Nebenbedingung erklärt und die andere Zielgröße unter Berücksichtigung dieser Nebenbedingung optimiert oder es erfolgt die Bildung einer neuen allgemeineren oder primären Zielgröße Nutzen, die eine Kombination der speziellen Zielgrößen darstellt.[1] Im zweiten Falle aber muß im Anlageziel enthalten sein, "wie sich Risiko und angestrebter Ertrag zueinander verhalten sollen";[2] es muß also die Austauschkurve zwischen Ertrag und Risiko (Indifferenzkurve) bekannt sein.

Neben dem Einfluß auf das Anlageziel hat die Unsicherheit auch Einfluß auf die Stufe der Sammlung und Analyse der Handlungsalternativen; denn bei dem Kapitalanlageproblem muß außer dem zukünftigen Ertrag auch dessen Risiko prognostiziert werden, womit wiederum die Menge der zu beschaffenden Daten größer wird. Je größer diese Datenmenge und damit die zu bewältigende Information ist, um so komplexer und schwieriger werden auch die Verfahren auf der Stufe der Planungsrechnung.

Schließlich verlangt die Unsicherheit eine Kontrolle und Berücksichtigung früher getroffener Entscheidungen; das bedeutet eine eventuelle Umschichtung zwischen den Anlageobjekten und einen neuen Entscheidungsprozeß hinsichtlich der Verwendung eines Kapitalbudgets. Die Durchführung eines konkreten Entscheidungsprozesses bei dem Problem der optimalen Kapitalanlage kann auf der Grundlage von Modellen erfolgen. Bei Modellen handelt es sich um vereinfachte Abbildungen der Wirklichkeit. Dabei sind statische und dynamische, spezielle und allgemeine Modelle zu unterscheiden. Bisher wurden zum Kapitalanlageproblem nur statische Mo-

---

1) Vgl. dazu: U. BLUMENTRATH: Investitions- und Finanzplanung mit dem Ziel der Endwertmaximierung, Wiesbaden 1969, S. 174f.

2) H. GÜNTER: Unbewegliche Anlagepolitik: Der sicherste Weg zum Mißerfolg, in: Kapitalanlagen, Beilage des Handelsblatt Nr. 176 vom 12. 9. 1967.

delle entwickelt; außer unvollkommenen Ansätzen zur Dynamisierung des Problems, zumindest aber der expliziten Berücksichtigung der Zeit, liegen noch keine dynamischen Modelle vor.[1] Weiter sind die Modelle zur Portfolio Selection bisher vor allem spezieller Natur, d. h. sie beziehen sich fast nur auf die Stufe der Planungsrechnung. Eine Ausnahme bildet das allgemeine Modell von HIELSCHER, der alle Stufen des Entscheidungsprozesses in einem Modell zu erfassen sucht.[2] Modelle zur Portfolio Selection, die sich nur auf die Stufe der Planungsrechnung beziehen, die also nur die zur Verfügung stehende Anlagesumme auf einzelne Investitionsobjekte verteilen helfen, bezeichnet HIELSCHER wegen ihres instrumentellen Charakters als "Kalkülmodelle".[3]

Bei der Behandlung des Kapitalanlageproblems ist zwischen einem mehr theoretischen und einem mehr empirischen Vorgehen zu unterscheiden. Während HIELSCHER sein Modell vorwiegend theoretisch aufbaut, sollen im Rahmen dieser Arbeit zwei[4] Kalkülmodelle im Sinne HIELSCHERs numerisch getestet und miteinander verglichen werden. Es handelt sich dabei um eine retrospektive "Sensivitätsanalyse" auf der Grundlage empirischer Daten.

1.2 Übersicht über den Aufbau der Arbeit

Die Untersuchung ist in sieben Kapitel gegliedert. In der

---

1) Vgl. dazu U. BLUMENTRATH: Loc. cit., S. 173.

2) Vgl. U. HIELSCHER: Das optimale Aktienportefeuille, Grundlagen der Kapitalanlageplanung am Aktienmarkt, 2. Auflage, Frankfurt am Main 1969.

3) Vgl. U. HIELSCHER: Loc. cit., S. 51 und S. 57.

4) Zur grundsätzlichen Erkenntnis der Aussagefähigkeit der vorhandenen Modelle reicht der Test von zwei Modellen, da im theoretischen Aufbau keine allzu großen Unterschiede bestehen. Der Aufwand beim Testen aller Modelle würde zu der gewonnenen Erkenntnis in keinem Verhältnis mehr stehen. Vgl. zum Aufwand beim Testen: W. NEUHAUS: Indexmodelle zur Planung effizienter Wertpapierportefeuilles, in: ZfB Nr. 12 1969, S. 801-820.

Einführung wird nach der Problemstellung und der Übersicht über den Aufbau der Arbeit eine Klärung der wichtigsten Begriffe angestrebt.

Aufgabe des 2. Kapitels soll es sein, einige spezielle Kalkülmodelle der Portfolio Selection zu beschreiben. Es wird ein kurzer, theoretischer Überblick über vier Modelle - in der Reihenfolge ihrer historischen Entwicklung - gegeben. Ausgegangen wird von dem umfassendsten Modell, das von MARKOWITZ stammt. Anhand seines Modells werden einige Voraussetzungen, die für alle Modelle gelten, neben den speziellen Voraussetzungen seines Modells gezeigt. Weiter werden mit dem Modell von MARKOWITZ die Zusammenhänge zwischen den Parametern einzelner Wertpapiere und denen von Portefeuilles aufgezeigt. Danach wird kurz erläutert, was man unter einem optimalen Portefeuille zu verstehen hat. Durch eine geometrische Analyse, die auf drei und vier Wertpapiere beschränkt ist, wird sodann die grundsätzliche Lösung des Modells von MARKOWITZ vorgestellt. Diese Lösung wird rechnerisch im nächsten Abschnitt auf den Allgemeinfall, also für jede beliebige Anzahl von Wertpapieren erweitert. Mit einem numerischen Beispiel wird das Rechenverfahren demonstriert. In den nächsten Abschnitten werden drei weitere Modelle kurz mit ihren Eigenarten vorgestellt.

Im 3. Kapitel schließen sich Untersuchungen über die Eingabedaten der Modelle an; wobei teilweise eine Einschränkung auf das Modell von MARKOWITZ erfolgt. Grundsätzlich werden nur Aktiengesellschaften in die Untersuchung einbezogen, für die während des insgesamt betrachteten Zeitausschnitts von 1953 bis 1967 regelmäßig Börsenumsätze getätigt wurden. Das ist bei den vierzig der Höhe ihres Nominalkapitals am 31. 12. 1953 nach größten Aktiengesellschaften der Fall. Sie werden im Anhang in Tabelle 1*[1)] mit ihrem vollständi-

1) Alle Tabellen oder Seiten, die mit dem Zeichen "*" bezeichnet sind, befinden sich im Anhang.

gen Namen und den in allen späteren Untersuchungen verwendeten Kurztiteln vorgestellt. In Tabelle 2*[1] werden die Erträge der eben erwähnten Gesellschaften während des Zeitraums von Ende 1953 bis Ende 1967 dargestellt. Im anschließenden Abschnitt wird kurz auf den Zusammenhang zwischen den Erträgen einzelner Aktien eingegangen. In einem dritten Abschnitt werden einige finanzanalystische Bemerkungen zur Prognose von Aktienerträgen abgehandelt.

Innerhalb des 4. Kapitels werden dann aus den vier Modellen die beiden extremen retrospektiv auf die in Tabelle 1* angegebenen Aktienerträge in verschiedenen Zeiträumen angewendet. Dazu werden die benutzten Computerprogramme beschrieben. Für das Modell von MARKOWITZ in seiner einfachen Ausführung wurde vom Verfasser ein eigenes Programm entwickelt; es ist im Anhang als Tabelle 13*[2] abgedruckt. Für das Modell von MARKOWITZ werden drei typische Anwendungen in den Tabellen 3* bis Tabelle 8*[3] angegeben. In einem zweiten Abschnitt wird das für die Anwendung des Modells von SHARPE benutzte Programm der IBM beschrieben. Zwei Anwendungen des Modells von SHARPE werden in den Tabellen 9* bis Tabelle 12*[4] angegeben.

Im 5. Kapitel werden die Ergebnisse der speziellen Anwendungen kritisch gewürdigt und auf ihre Güte hinsichtlich der Zielkombination Ertrag und Risiko überprüft, indem sie der tatsächlich eingetretenen Entwicklung gegenübergestellt werden. Nach einer Darstellung der Ergebnisse der zwei angewendeten Modelle werden diese untereinander verglichen.

---

1) Vgl. S. 5* - S. 7*.
2) Vgl. S. 28* - S. 47*.
3) Vgl. S. 8* - S. 15*.
4) Vgl. S. 16* - S. 27*.

In einem weiteren Abschnitt werden hinsichtlich der Modelle Schlußfolgerungen angestellt.

Im 6. Kapitel werden Schwierigkeiten bei der Anwendung der Modelle in der Anlagepraxis angeschnitten. Dazu werden zunächst Kostenschätzungen hinsichtlich der verwendeten Computerprogramme angestellt. In einem zweiten Abschnitt werden dann andere Programme zu Modellen der Portfolio Selection erwähnt. Anschließend werden einige Erweiterungs- und Ergänzungsmöglichkeiten der Modelle aufgezeigt.

Im 7. Kapitel werden die Möglichkeiten der Anwendung der Modelle der Portfolio Selection beurteilt und eine kurze Zusammenfassung der Ergebnisse dieser Arbeit gegeben.

1.3 Definition der grundlegenden Begriffe

1.3.1 Der Begriff des Portefeuilles

Der Begriff des Portefeuilles ist in der Praxis mehrdeutig. Zum Teil wird mit dem Begriff des Portefeuilles eine vielfältige Anlage[1)] etwa in Kunstgegenständen, Wertpapieren, Briefmarken usw. verbunden. Es werden also viele Handlungsalternativen der Kapitalanlage mit diesem weiteren Portefeuillebegriff verknüpft. In der überwiegenden Zahl der Fälle wird hierunter jedoch lediglich die Anlage von Geld in Wertpapieren verstanden. Im Rahmen dieser Arbeit wird nur auf den enger gezogenen Begriff des Portefeuilles, d. h. auf ein Portefeuille, welches nur Effekten beinhaltet, Be-

1) Ursprünglich wurde unter Portefeuille die Tasche - bei größeren Beständen die Karteikästen - zum Aufbewahren von Wechseln und anderen Wertpapieren verstanden. Im übertragenen Sinn versteht man heute darunter einen Wertpapierbestand oder eine Sammlung von Wertgegenständen.

zug genommen.[1] Da bei festverzinslichen Wertpapieren die Zinsen bekannt sind und nur begrenzte Kursschwankungen auftreten, läßt sich die erwartete Rendite bei derartigen Papieren recht genau abschätzen. Sie haben ein relativ geringes Ertragsrisiko, ein Kapitalanleger hat also große Gewißheit über die Entwicklung von festverzinslichen Wertpapieren und kann seine Entscheidungen so treffen, wie wenn er Sicherheit hätte.[2] Daher wird im weiteren Verlaufe dieser Arbeit, soweit nichts anderes gesagt ist, nur von Aktienportefeuilles ausgegangen, es erfolgt also eine weitere Einschränkung des Portefeuillebegriffs.

1.3.2 Maßgrößen, Algorithmen, Nebenbedingungen von Modellen

Wie in der Problemstellung bereits dargestellt, muß wegen des Unsicherheitsproblems zusätzlich zur Zielgröße Ertrag die Zielgröße Risiko berücksichtigt werden. Von den Möglichkeiten einer derartigen Berücksichtigung verwenden die bisherigen Kalkülmodelle der Portfolio Selection nicht die Möglichkeit der Maximierung einer allgemeinen Zielgröße Nutzen, sie optimieren vielmehr eine der beiden Zielgrößen und erklären ein bestimmtes Niveau der anderen Zielgröße zur Nebenbedingung, wobei allerdings zusätzlich die Nebenbedingung systematisch variiert wird. Die so ermittelten Wertpapierkombinationen unterscheiden sich von allen anderen Kombinationen dadurch, daß keine existiert, die entwe-

---

1) Da sich die Technik einiger Modelle der Portfolio Selection auch für Anlageobjekte des weiteren Portefeuillebegriffes eignet, sollen bereits an dieser Stelle die Anwendungsversuche einiger Autoren genannt werden. Vgl. J. CORD: A Method for Allocating Funds to Investment Projects when Returns are Subject to Uncertainty, in: Management Science, Vol. 10 1964, S. 335-341. Vgl. K. J. COHEN und E. ELTON: Inter-Temporal Portfolio Analysis Based on Simulation of Joint Returns, in: Management Science, Vol. 14 1967, S. 5-18.

2) Vgl. dazu U. BLUMENTRATH: Loc. cit., S. 168.

der bei gegebenem Ertrag ein geringeres Risiko oder bei gegebenem Risiko einen höheren Ertrag aufweist. Als Maßgröße für Ertrag und Risiko stehen z. B. Erwartungswert und Varianz, Erwartungswert und Standardabweichung, sowie Erwartungswert und Semivarianz[1] zur Auswahl. Denkbar sind auch Modelle, die Median und Spannweite[2] als Maßgrößen für Ertrag und Risiko benutzen.

Nun verwenden die existierenden Modelle aber sämtlich die Varianz des erwarteten Ertrages eines Portefeuilles als Risikomaß, d. h. sie minimieren zu verschieden hohen erwarteten Erträgen eines Portefeuilles das zugehörige Risiko, gemessen an der Varianz. Es werden also für parametrisch konstante Erwartungswerte von Erträgen deren Varianzen minimiert; Instrumentalvariable sind die Portefeuilleanteilswerte X_i; d. h. über die Variation der relativen Anteile X_i, mit denen eine Aktie in einem Portefeuille enthalten ist, wird das Gesamtrisiko eines Portefeuilles bei einer bestimmten Ertragshöhe minimiert.

Ohne an dieser Stelle schon näher darauf einzugehen, sei nur gesagt, daß die Varianz einer Zufallsvariablen ein quadratischer Operator ist. Von einem Problem der "quadratischen Programmierung" spricht man immer dann, wenn entweder eine quadratische Grundfunktion oder eine lineare Grundfunktion mit quadratischen Nebenbedingungen zu opti-

---

1) Vgl. H.M. MARKOWITZ: Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments, Monograph 16 der COWLES-Foundation, New York/London/Sydney 1959, Second Printing 1965, S. 188-201. MARKOWITZ versteht unter Semivarianz eine Art Varianz, bei der nur die negativen Abweichungen vom Mittel in die Rechnung eingehen.

2) Vgl. dazu: H.M. MARKOWITZ: Loc. cit., S. 200f. Dort zeigt MARKOWITZ, daß für die Kombination Erwartungswert - Standardabweichung auch die Monte-Carlo-Methode anwendbar ist. Das gleiche gilt ceteris paribus auch für Median und Spannweite.

mieren ist. Da in den Kalkülmodellen der Portfolio Selection für parametrisch konstante Erwartungswerte von Erträgen deren Varianzen minimiert werden, handelt es sich um ein Problem der "parametrisch quadratischen Programmierung".

Zur Lösung von Problemen der "quadratischen Programmierung" stehen mehrere Algorithmen zur Verfügung. Einen guten Überblick über die bis Ende 1960 entwickelten Ansätze gewinnt man aus dem Artikel von DORN.[1] Erwähnt seien hier nur folgende:

a) WOLFEs Methode für "quadratische Programme",
b) BEALEs Methode für "quadratische Programme",
c) THEILs und van de PANNEs Methode für "quadratische Programme und
d) die "Kritische Linienmethode" von MARKOWITZ.[2]

Für Programme, die eine quadratische Grundfunktion minimieren oder maximieren und daneben noch quadratische Nebenbedingungen verlangen,[3] gibt es bis heute noch keine allgemeinen Lösungsverfahren oder Algorithmen. Bei den Nebenbedingungen oder Restriktionen werden modellbdingte und fakultative unterschieden. Eine solche modellbedingte Restriktion kann z. B. die Nichtnegativitätsbedingung sein. Fakultative oder persönliche Nebenbedingungen sind solche, die bei dem Kapitalanlageproblem vom Entscheidungsträger zusätzlich zu den modellbedingten noch verlangt werden können. Durch die Einführung von fakultativen Restriktionen

---

1) W.S. DORN: Non-Linear Programming - A Survey, in: Management Science Vol. 9 1963, S. 171-206.

2) Siehe H.M. MARKOWITZ: Loc. cit., S. 177-187 und Appendix A.

3) Näherungslösungen für Kapitalanlageprobleme mit nichtlinearen Nebenbedingungen durch Kalkülmodelle der Portfolio Selection lassen sich evtl. durch Simulation linearer Nebenbedingungen finden, A. d. V.

gewinnen die Modelle an Wirklichkeitsnähe. Eine solche fakultative oder persönliche Nebenbedingung kann z. B. sein, daß höchstens bis zu fünf Prozent der gesamten Investitionssumme in einer bestimmten Aktie angelegt werden dürfen. Hinsichtlich der Erweiterungen der von einem Kalkülmodell zur Portfolio Selection zugelassenen Restriktionen können verschiedene Ansätze beobachtet werden.[1] Ebenso sind noch andere Nebenbedingungen, die sich z. B. aus dem richtigen "Timing" von Wertpapiertransaktionen ergeben können, denkbar; das würde allerdings eine Dynamisierung der statischen Modelle notwendig machen. Durch die Einführung von fakultativen Restriktionen gewinnen die Modelle also an Wirklichkeitsnähe; leider aber gibt es bis heute noch größere Schwierigkeiten, die u. a. in der zu kleinen Speicherkapazität der meisten heutigen Computer begründet sind.

1.3.3 Der Begriff des Portfolio Selection-Modells

Ein Charakteristikum der Modelle der Portfolio Selection ist, daß von ihnen Portefeuilles, nicht einzelne Wertpapiere für sich genommen, die möglichen Kapitalanlageobjekte darstellen[2] und zwar auch dann, wenn als Grenzfall ein Portefeuille nur eine Aktie enthält. Da sich ein Portefeuille im früher definierten Sinne immer aus einzelnen Aktien zusammensetzt, besteht die Notwendigkeit, die einzelnen Aktien voneinander abzugrenzen; dies läßt sich z. B.

---

1) Vgl. dazu K.L. HASTIE: The Determination of Optimal Investment Policy, in: Management Science Vol. 13 1967, S. B-757-B-774, sowie D.D. HESTER: Efficient Portfolios with Short Sales and Margin Holdings, in: Risk Aversion and Portfolio Choice, Monograph 19 der COWLES-Foundation, New York/London/Sydney 1967, S. 41-50. Unter "Short Sales" sind Leerverkäufe und unter "Margin Holdings" sind entsprechend Leerkäufe zu verstehen. Termingeschäfte in Wertpapieren sind in Deutschland seit 1931 verboten, A. d. V.

2) Vgl. D.E. FARRAR: The Investment Decision Under Uncertainty, Third Printing, New York 1964, S. 18.

mit Begriffen der Mengenlehre[1] durchführen. Wir führen daher die Begriffe der Obermenge und der Teilmengen erster und zweiter Ordnung ein. Unter Obermenge wollen wir alle in einem bestimmten Zeitraum an irgendeiner deutschen Börse notierten Aktien verstehen. Dieser Zeitraum umfaßt in dieser Arbeit die Jahre 1954 bis 1967. Eine Teilmenge erster Ordnung besteht dann aus denjenigen Aktien, die nach einem - sich aus dem Anlagezweck ergebenden - Kriterium aus der Obermenge ausgewählt und der Betrachtung durch ein Modell der Portfolio Selection unterworfen werden. Was hier als Teilmenge erster Ordnung definiert wurde, wird in der angelsächsischen Literatur üblicherweise als "Sample" bezeichnet. Aus der Teilmenge erster Ordnung lassen sich wiederum viele Teilmengen zweiter Ordnung erzeugen. Effizient werden diese Teilmengen dann genannt, wenn sie mit Hilfe eines Kalkülmodells der Portfolio Selection bestimmt werden, was eben auf Varianzminimierung hinausläuft.

Von einem Kalkülmodell der Portfolio Selection wollen wir dann sprechen, wenn von ihm bei gegebenen Restriktionen aus den Elementen einer Teilmenge erster Ordnung Teilmengen zweiter Ordnung derart bestimmt werden, daß ceteris paribus die ausgewählten Teilmengen zweiter Ordnung in einer gewählten Eigenschaft günstiger, mindestens jedoch gleich günstig wie alle anderen Teilmengen zweiter Ordnung sind. Eine solche gewählte Eigenschaft ist bei den Kalkülmodellen der Portfolio Selection meistens das Risiko. Bei Teilmengen zweiter Ordnung ist also zu einem bestimmten erwarteten Ertrag des Portefeuilles das zugehörige Risiko minimal; d. h. die Teilmengen zweiter Ordnung sind effiziente Untermengen der Teilmenge erster Ordnung und damit auch der Obermenge der Wertpapiere.

---

1) Vgl. E. KAMKE: Mengenlehre, Sammlung Göschen Bd. 999/999a, Berlin 1965, S. 13f.

Sparprogramme, Sparsysteme oder Sparpläne und Anlagepläne, wie sie von Banken und Versicherungen angeboten werden,[1] können nicht als Kalkülmodelle der Portfolio Selection angesehen werden; denn die von ihnen erzeugten oder empfohlenen Teilmengen zweiter Ordnung sind höchstens zufällig effiziente Untermengen der Teilmengen erster Ordnung, d. h. der betrachteten Wertpapiere. Das gleiche gilt für das Verfahren des "Dollar Cost Averaging".[2]

Die verschiedenen Kalkülmodelle der Portfolio Selection unterscheiden sich nun darin, welche und wieviele Maßgrößen für die Bestimmung der effizienten Teilmengen zweiter Ordnung angewendet werden, welche rechentechnischen Methoden (Algorithmen) zur Lösung von ihnen verwendet werden und welche und wie viele Nebenbedingungen (Restriktionen) sie verarbeiten können.

---

1) Über Sparsysteme und Anlagepläne einiger deutscher Privatbanken erhält man in einem Aufsatz von SCHLEIF einen Überblick. Vgl. G. SCHLEIF: Variationen über ein Thema - Sparsysteme scheinen die Kunden anzusprechen -, in: Kapitalanlagen, Beilage des Handelsblatt Nr. 119 vom 25. 6. 1968. Vgl. J.B. COHEN und E.D. ZINBARG: Investment Analysis and Portfolio Management, Homewood 1967, S. 536-555. Im Kapitel 15 dieses Buches wird eine Zusammenfassung über Formelanlagepläne gegeben, A. d. V.

2) Vgl. W. FARNELL: Wertpapieranlage in den USA, Frankfurt 1967, S. 64.

2. THEORETISCHER ÜBERBLICK ÜBER EINIGE MODELLE DER PORTFOLIO SELECTION

2.1 Das Modell von MARKOWITZ

2.1.1 Die Voraussetzungen

Bei unsicheren Erwartungen trifft, wie bereits ausgeführt, ein rational handelnder Mensch seine Entscheidungen so, daß Ertrag und Risiko in einem den individuellen Nutzenvorstellungen entsprechenden Verhältnis zueinander stehen. Ein Anlagekriterium, das diesem Verhalten entspricht, ist die "Expected Returns - Variance of Returns"-Maxime von MARKOWITZ. Sie besagt, daß ein Kapitalanleger bestimmte, vorgegebene Erträge erzielen möchte, dabei aber gleichzeitig nur ein möglichst kleines Risiko zu tragen wünscht.[1] Dabei sei von der das Modell beträchtlich vereinfachenden Annahme ausgegangen, daß ein Portefeuille als langfristige Kapitalanlage und nicht zu spekulativen Zwecken gehalten wird;[2] denn andernfalls müßte die Zeit explizit im Modell berücksichtigt werden.

Für die Festlegung der Teilmengen erster Ordnung bzw. der Stichprobe, d. h. der Wertpapiere, die in die engere Auswahl gelangen, spielt die Bewertung der Ertragsaussichten bzw. der "Wert" dieser Wertpapiere eine große Rolle. Unter dem Wert eines Wertpapiers versteht man häufig den diskontierten Wert seiner zukünftigen Erträge.[3]

---

1) Vgl. H.M. MARKOWITZ: Loc. cit., S. 6.

2) Vgl. A.D. MARTIN: Mathematical Programming of Portfolio Selections, in: Management Science Vol. 1 1955, S. 152-166. Dort bemerkt MARTIN auch, daß die rationale Spekulation als strategisches Problem eine wesentlich kompliziertere mathematische Behandlung erfordert.

3) Vgl. z. B. A.D. MARTIN: Loc. cit., vgl. H. SCHLEMBACH: Deutsche Aktien - wieder kaufwürdig?, in: Kapitalanlage, Beilage des Handelsblatt Nr. 65 vom 4. April 1967.

Diese zukünftigen Erträge werden bei einer Aktie von Kursgewinnen bzw. -verlusten, von den Dividenden und Boni - bei festverzinslichen Wertpapieren von Kursgewinnen bzw. -verlusten und von den Zinsen - bestimmt. Der Ertrag (e) eines Wertpapiers wird in dieser Arbeit deshalb wie folgt definiert:[1)]

$$(2.1) \qquad e = \frac{(K_t - K_{t-1}) + Z}{K_{t-1}} \cdot 100[\%] .$$

Es bedeutet K_t den Kurswert im Zeitpunkt t, K_{t-1} den Kurs im Zeitpunkt t-1, $(K_t - K_{t-1})$ den Kursgewinn bzw. -verlust im Zeitraum von t-1 bis t und Z im Falle von Aktien die Dividenden und Boni, im Falle von festverzinslichen Wertpapieren die Zinsen. In Formel (2.1) ist e der prozentuale Ertrag je angelegter DM in der Periode vom Zeitpunkt t-1 bis zum Zeitpunkt t.

MARKOWITZ geht in seinem Modell davon aus, daß der zukünftige Ertrag eines Wertpapiers eine Zufallsvariable darstellt.[2)] Ein Investor hat im allgemeinen gewisse Vorstellungen über die Realisierungsmöglichkeiten unterschiedlich hoher Erträge, so daß er einen bestimmten Ertrag (e) eines Wertpapiers für wahrscheinlicher hält als einen anderen. Kann der Investor aus seiner Erfahrung heraus den möglichen Erträgen eines Wertpapiers numerische Werte zuordnen, die die objektive Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse, d. h. die statistisch ermittelten Eintrittswahrscheinlichkeiten der möglichen zukünftigen Erträge eines Wertpapiers, angeben, so handelt es sich für einen Investor nicht mehr um eine Entscheidung unter Unsicherheit, sondern um

---

1) Vgl. H.M. MARKOWITZ: Loc. cit., S. 12.

2) Vgl. U. HIELSCHER: Optimale Depotzusammenstellung, in: Der Volkswirt Nr. 44 1966, S. 2163-2166.

eine Entscheidung unter Risiko.[1] Ist die Ermittlung objektiver Wahrscheinlichkeiten nicht möglich, so kann stattdessen mit subjektiven Wahrscheinlichkeiten gearbeitet werden. In der modernen Entscheidungstheorie wird immer dann mit solchen subjektiven Wahrscheinlichkeiten gearbeitet, wenn eine objektive Feststellung von Wahrscheinlichkeiten nicht möglich ist. Für das Zuordnen von Wahrscheinlichkeiten legt SCHLAIFER drei Grundregeln fest, die mit den drei Axiomen der axiomatischen Definition der Wahrscheinlichkeit übereinstimmen.[2]

Als Maßgröße für den Ertrag (e) eines Wertpapiers i (e_i) nimmt MARKOWITZ den Erwartungswert dieses Ertrages, da er angibt, wo der Schwerpunkt einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, d. h. der Verteilung der Zufallsvariablen e_{ik} (k=1, ..., n), liegt.[3] Der Erwartungswert R_i einer Zufallsvariablen e_i (i=1, ..., m), deren mögliche Werte e_{i1}, ..., e_{in} mit den subjektiven Wahrscheinlichkeiten $p(e_{i1})$, ... $p(e_{in})$ auftreten, wird folgendermaßen definiert:

$$(2.2) \quad R_i = \sum_{k=1}^{n} e_{ik} p(e_{ik}) = \mu_i, \text{ wobei } \sum_{k=1}^{n} p(e_{ik}) = 1.$$

Je weiter die möglichen Erträge eines Wertpapiers gestreut sind, desto größer ist auch die Gefahr, daß der erwartete Ertrag nicht erzielt wird.[4] Um dies zu berücksichtigen, verwendet MARKOWITZ als Maßgröße für das Ertragsrisiko die

---

1) Vgl. zur Unterscheidung der Begriffe Unsicherheit und Risiko und zur Problematik dieser Unterscheidung z.B. G. GÄFGEN: Loc. cit., S. 325-329.

2) Vgl. R. SCHLAIFER: Introduction to Statistics for Business Decisions, New York/Toronto/London 1961, S. 3.

3) Vgl. H.M. MARKOWITZ: Loc. cit., S. 48f.

4) Vgl. U. HIELSCHER: Optimale Depotzusammenstellung, in: Der Volkswirt, loc. cit.

Varianz. Die Varianz V_i einer Zufallsvariablen e_{ik} ($i=1, \ldots, m$), deren mögliche Werte e_{ik} mit den Wahrscheinlichkeiten $p(e_{ik})$ auftreten, wird wie folgt definiert:

$$(2.3) \quad V = E(e_{ik} - E(e_{ik}))^2 = \sum_{k=1}^{n} (e_{ik} - \mu_i)^2 \, p(e_{ik}),$$

wobei wiederum $\sum_{k=1}^{n} p(e_{ik}) = 1.$

2.1.2 Die Zusammenhänge zwischen einzelnen Wertpapieren und Portefeuilles

Der Kapitalanleger möchte aber nicht nur für ein einzelnes Wertpapier wissen, wie sich der Ertrag entwickeln wird und wie das entsprechende Eintrittsrisiko ist, sondern er interessiert sich für den zukünftigen Ertrag und dessen Eintrittsrisiko bei einem Portefeuille. Deshalb müssen die Einzelerträge und deren zugehörige Einzelrisiken von Wertpapieren zu dem erwarteten Ertrag und dem dazugehörigen Risiko eines Portefeuilles aggregiert werden.

Der erwartete Ertrag E eines Portefeuilles ist die gewichtete Summe der Erwartungswerte (R_i) der einzelnen Wertpapiere.

$$(2.4) \quad E = X_1 R_1 + \ldots + X_m R_m = \sum_{i=1}^{m} X_i \mu_i.$$

Die Gewichte X_i bedeuten hier den Bruchteil bzw. Anteil vom Gesamtbetrage der Kapitalsumme, der in das i-te Wertpapier investiert werden soll. Da die Summe der einzelnen Teilbeträge gleich der gesamten verfügbaren Geldsumme sein muß, gilt:

$$(2.5) \qquad \sum_{i=1}^{m} X_i = 1.$$

Die Bruchteile X_i müssen noch die Nichtnegativitätsbedingung erfüllen:

$$(2.6) \qquad X_i \geq 0 \text{ für alle } i.$$

Der Anteil eines Wertpapiers an der gesamten in einem Portefeuille anzulegenden Kapitalsumme darf also nicht negativ sein, d. h. Kreditkäufe und Leerverkäufe sind nicht zugelassen; dies ist insofern mit der Annahme der langfristigen Kapitalanlage konsistent, als Kreditkäufe und Leerverkäufe spekulative Manöver sind. Die Nebenbedingungen ((2.5), (2.6)) lassen sich auch allgemeiner formulieren:

$$(2.5a) \qquad A_1X_1 + \ldots + A_mX_m = B; \quad \sum_{i=1}^{m} A_iX_i = B,$$

$$(2.6a) \qquad A_1X_1 + \ldots + A_MX_M \leq C; \quad \sum_{j=1}^{M} A_jX_j \leq C.$$

In Gleichung (2.5a) sind die A_i bekannte Konstante; B ist die anzulegende Kapitalsumme. Werden die Nebenbedingungen wie in Formel (2.6a) nicht in Form von Gleichungen gegeben, so müssen sie durch Schlupfvariable in Gleichungen umgeformt werden.[1)]

Das Risiko eines Portefeuilles ist nun nicht einfach die Summe aller Einzelrisiken, der im Portefeuille enthaltenen Wertpapiere, sondern hängt weitgehend davon ab, wie die einzelnen Wertpapiere miteinander korreliert sind. Das Gesamtrisiko, d. h. die Varianz des Portefeuilleertrages, wird von MARKOWITZ daher wie folgt definiert:

---

1) Vgl. IBM 7090 Program-Manual # 7090-03X, Portfolio Selection, o. V., New York 1962, S. 34f.

$$(2.7) \quad V = \sum_{i=1}^{m} X_i^2 \sigma_{ii} + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \sum_{j=1}^{m} X_i X_j \sigma_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} X_i X_j \sigma_{ij} .$$

In der Gleichung (2.7) bedeutet σ_{ii} die Varianz des i-ten Wertpapiers und σ_{ij} die Kovarianz zwischen den Wertpapieren i und j. Die X_i bzw. X_j sind die Bruchteile der Kapitalsumme, die in das Wertpapier i oder j investiert wurden. MARKOWITZ mißt die Korrelation zweier Zufallsvariablen durch deren Kovarianz; denn es gilt:

$$(2.8) \quad r_{(X_1,X_2)} = \frac{Cov_{(X_1,X_2)}}{\sigma_{(X_1)} \cdot \sigma_{(X_2)}} .$$

In Formel (2.8) ist $r_{(X_1,X_2)}$ der Korrelationskoeffizient für die Zufallsvariablen X_1, X_2, $\sigma_{(X_1)}$ die Standardabweichung von X_1 und $\sigma_{(X_2)}$ die Standardabweichung von X_2. Der Korrelationskoeffizient zwischen zwei Zufallsvariablen ist also eine normierte Kovarianz. Das Ausmaß, in dem ein Wertpapier zu der Streuung des Portefeuillerisikos beiträgt, hängt vor allem von den Kovarianzen zu den anderen Wertpapieren des Portefeuilles ab. Wenn ein möglichst kleines Risiko die Anlagemaxime ist, so sollte schon bei der Festlegung der Teilmengen 1. Ordnung, d.h. der in die Auswahl gelangenden Wertpapiere, darauf geachtet werden, daß möglichst viele Elemente mit geringer Korrelation darunter sind. Ein Portefeuille aus Aktien nur einer Branche erweist sich somit bei Anwendung des Modells von MARKOWITZ als wenig zweckmäßig.

2.1.3 Die "Effizienz" von Portefeuilles

Ein Portefeuille ist im MARKOWITZschen Sinne effizient, wenn es zu der Menge der zugelassenen,[1] d. h. für den Portefeuillemanager oder Kapitalanleger hinsichtlich der fakultativen Nebenbedingungen annehmbaren Portefeuilles gehört und wenn aus der Teilmenge erster Ordnung, also aus den in die Auswahl gelangenden Wertpapieren, kein anderes Portefeuille bestimmt werden kann, das bei gleichem Ertrag (E) eine kleinere Varianz (V) hat. Bei einem effizienten Portefeuille kann durch die Änderung seiner Zusammensetzung der erwartete Ertrag nur bei gleichzeitiger Erhöhung des Risikos, gemessen an der Portefeuillevarianz (V), gesteigert werden. Alternativen Erträgen wird also das jeweils optimale, hier also minimale Risiko zugeordnet. Es wird folglich, geometrisch betrachtet, der Ort der effizienten Kombinationen von Ertrag und Risiko ermittelt. Das ist die Voraussetzung für eine spätere Optimierung des Nutzens.

Je nachdem, welche Maßgrößen für Ertrag und Risiko in einem Kalkülmodell der Portfolio Selection verwendet werden, kann ein Portefeuille Erwartungswert - Standardabweichung (E,σ) oder Erwartungswert - unterer Vertrauensbereich (E, L) effizient sein.[2] Ist ein Portefeuille E,σ-effizient, so wird das Risiko an der Standardabweichung eines Portefeuilles, d. h. an der Quadratwurzel der Portefeuillevarianz (V) gemessen. Ist ein Portefeuille E,L-effizient, so wird das Risiko, das dem Kapitalanleger annehmbar erscheint, mit dem erwarteten Ertrag eines Portefeuilles verknüpft.

---

1) Modelle, bei denen beispielsweise Leerverkäufe erlaubt sind, haben ceteris paribus eine andere Menge von zugelassenen oder "legitimate" Portefeuilles, als Modelle, bei denen dies nicht erlaubt ist.

2) Vgl. W.J. BAUMOL: An Expected Gain-Confidence Limit Criterion for Portfolio Selection, in: Management Science Vol. 10 1963, S. 174-182.

2.1.4 Geometrische Analyse E,V-effizienter Portefeuilles

Wie bereits dargestellt, sind bei dem Modell von MARKOWITZ jedem Portefeuille ein ganz bestimmter erwarteter Ertrag (E) und eine ganz bestimmte Varianz (V) dieses Ertrags zugeordnet. Die Werte für E hängen von den Parametern μ_i und die Werte für V von den Parametern σ_{ii} und σ_{ij} ab. E und V hängen außerdem noch von den Anteilswerten X_i ab. Hierbei bedeutet μ_i der erwartete Ertrag eines einzelnen Wertpapiers, σ_{ii} die Varianz dieses Ertrages; σ_{ij} ist die Kovarianz des Ertrages zwischen den Wertpapieren i und j, und X_i ist der Anteilswert der Kapitalsumme, der in das Wertpapier i investiert wird. Die Anteilswerte X_i müssen dabei noch den Nebenbedingungen, die in den Formeln (2.5) und (2.6) gekennzeichnet wurden, genügen.

Aus Darstellungsgründen wird bei der geometrischen Analyse von einem Portefeuille mit maximal drei Wertpapieren ausgegangen. Für den erwarteten Ertrag (E) eines Portefeuilles in diesem Spezialfall gilt:

$$(2.4a) \quad E = X_1\mu_1 + X_2\mu_2 + X_3\mu_3 = \sum_{i=1}^{3} X_i\mu_i.$$

Wegen der in Gleichung (2.5) festgehaltenen Nebenbedingung gilt:

$$(2.5b) \quad X_3 = 1 - X_1 - X_2.$$

Wird in Gleichung (2.4a) für X_3 die rechte Seite der Gleichung (2.5b) eingesetzt, so ergibt sich nach einigem Umformen:

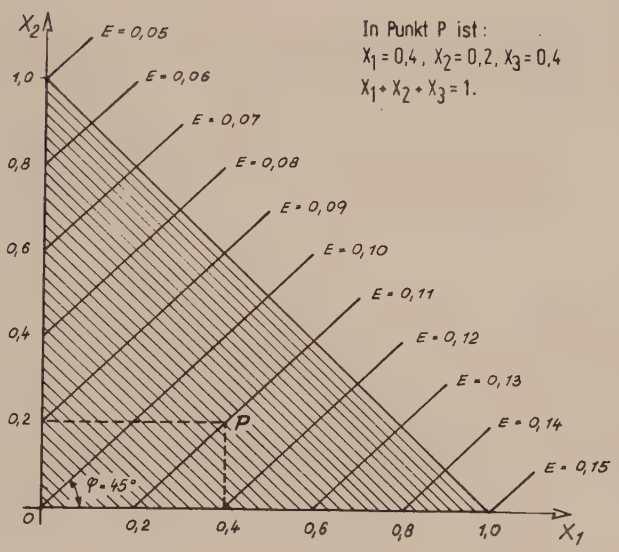
$$(2.4b) \quad E = (\mu_1 - \mu_3)X_1 + (\mu_2 - \mu_3)X_2 + \mu_3.^{1)}$$

---

1) H.M. MARKOWITZ: Loc. cit., S. 133f.

Wird E in Gleichung (2.4b) konstant gesetzt, z. B. E = 0,05, so kann die Gleichung nach X_1 oder X_2 aufgelöst werden. Durch Variation von E kann dann ein System von parallelen Geraden ermittelt werden. In Abbildung 2-1 werden die Geraden für die erwarteten Erträge von E = 0,05 bis E = 0,15 in Schritten von 0,01 dargestellt.

Abbildung 2-1: Linien gleicher Portefeuilleerträge.



Die Werte von $\mu_1 = 0,15$, $\mu_2 = 0,05$ und $\mu_3 = 0,10$, die der Abbildung 2-1 zugrundeliegen, wurden so gewählt, daß das System der Geraden eine Steigung von +1 hat, d. h. der Winkel φ ist gleich $\pi/4$ bzw. 45°. Der schraffierte Bereich in Abbildung 2-1 gibt die Menge der zulässigen (annehmbaren) Portefeuilles an.

Für die Varianz (V) des erwarteten Ertrages eines Portefeuilles gilt in diesem Spezialfall:

$$(2.7a)\quad V = X_1^2\sigma_{11} + X_2^2\sigma_{22} + X_3^2\sigma_{33} + 2X_1X_2\sigma_{12} + 2X_1X_3\sigma_{13} + 2X_2X_3\sigma_{23}.$$ [1)]

Substituieren wir in Gleichung (2.7a) X_3 wieder durch die rechte Seite der Gleichung (2.5b), so ergibt sich nach einigem Umformen:

$$(2.7b)\quad V = X_1^2(\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}) + X_2^2(\sigma_{22} + 2\sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2X_1X_2(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2X_1(\sigma_{13} - \sigma_{33}) + 2X_2(\sigma_{23} - \sigma_{33}) + \sigma_{33}.$$

Wird V in Gleichung (2.7b) konstant, z. B. V = 0,04, gesetzt und wird die Gleichung nach X_1 oder X_2 aufgelöst und die zugehörige Kurve aufgezeichnet, so erhält man, sofern die Gleichung (2.7b) eine reelle Lösung hat, eine Ellipse. Nur unter ganz besonderen Voraussetzungen[2)] ist die der Gleichung (2.7b) zugehörende Kurve keine Ellipse. Eine solche Ellipse ist der geometrische Ort aller Portefeuilles mit gleicher Varianz (V). Läßt man V nun verschiedene Werte annehmen, so erhält man ein System von ähnlichen, konzentrisch angeordneten Ellipsen, deren große bzw. kleine Halbachse jeweils die gleiche Steigung haben (vgl. Abb. 2-2).

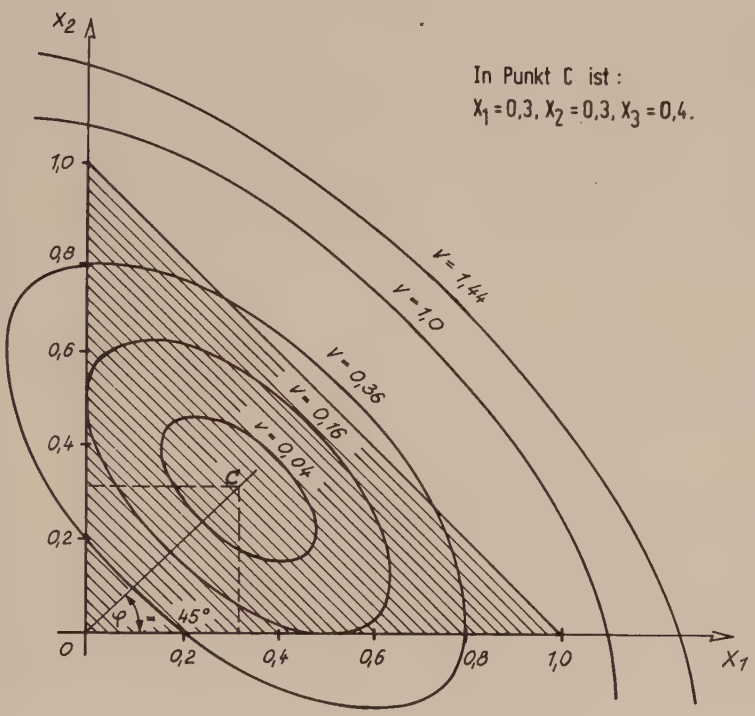
---

1) Vgl. H.M. MARKOWITZ: Loc. cit., S. 135f.

2) Diese Voraussetzungen sind für die folgenden Ausführungen nebensächlich, näheres kann bei MARKOWITZ: Loc. cit., S. 137 nachgelesen werden.

In Abbildung 2-2 werden solche Isovarianzellipsen für Varianzen von V = 0,04 bis V = 1,44 dargestellt.

Abbildung 2-2: Isovarianzlinien.

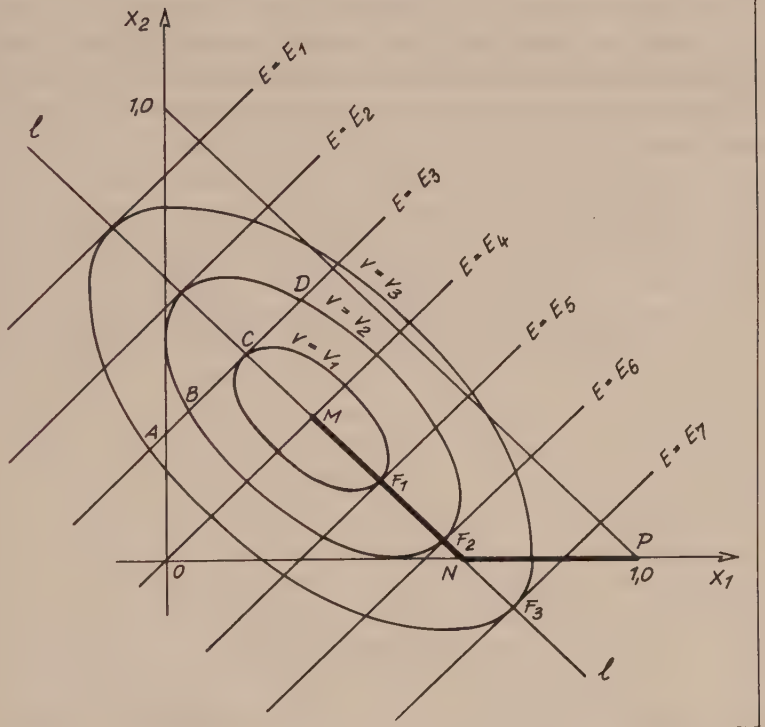


Die Werte von $\sigma_{11} = 2,74$, $\sigma_{22} = 2,74$, $\sigma_{33} = 0,72$, $\sigma_{12} = 0,18$, $\sigma_{13} = 0,48$, $\sigma_{23} = 0,48$, die der Abbildung 2-2 zugrundeliegen, wurden so gewählt, daß das System der Ellipsen mit den kleinen Halbachsen eine Steigung von +1 hat; d. h. der Winkel φ ist gleich $\pi/4$ bzw. 45°. Der schraffierte Bereich in Abbildung 2-2 gibt wiederum die Menge der zulässigen (annehmbaren) Portefeuilles an.

Stellt man Abbildung 2-1 und Abbildung 2-2 zusammen in einem Koordinatensystem (vgl. Abb. 2-3) dar, so lassen sich geometrisch jene Portefeuilles ermitteln, die für einen gegebenen erwarteten Ertrag eines Portefeuilles dessen Varianz, d. h. dessen Risiko, minimieren. In Abbildung 2-3 sind sowohl Linien gleicher Portefeuilleerträge als auch Isovarianzellipsen eingezeichnet. Auf der Geraden $E = E_1$ befinden sich sämtliche Portefeuilles mit demselben erwarteten Ertrag E_1. Entsprechend repräsentieren die Linien E_2 bis E_7 die Menge von Portefeuilles mit den gleichen erwarteten Erträgen E_2 bis E_7. Auf der Ellipse $V = V_1$ befinden sich alle Portefeuilles mit der gleichen Varianz $V = V_1$. Auf den Ellipsen $V = V_2$ und $V = V_3$ liegen entsprechend alle Portefeuilles mit dem Risiko V_2 und V_3.

Gehen wir in Abbildung 2-3 auf der Geraden $E = E_3$ vom Punkt A zum Punkt B und dann zum Punkt C, so schneiden wir Isovarianzellipsen mit abnehmendem Risiko, zuerst V_3, dann V_2, dann V_1. Bewegt man sich auf der Geraden E_3 von C nach D, so steigt das Risiko wieder an. Die Schnittpunkte B, C und D liegen dabei in dem Bereich zulässiger Portefeuilles. In Punkt C befindet sich zu dem erwarteten Ertrag E_3 das Portefeuille mit dem kleinstmöglichen Risiko V_1. Hier berührt die Isoertragslinie E_3 gerade die Isovarianzellipse V_1. Führt man diese Operation auf allen Geraden mit gleichen Portefeuilleerträgen aus, so erhält man eine Menge von Tangentialpunkten, die alle auf der Geraden ll liegen. Diese Gerade ll wird von MARKOWITZ als "kritische Linie" bezeichnet. Ein Portefeuille auf dieser kritischen Linie ist also das Portefeuille mit dem geringsten Risiko zu einem bestimmten erwarteten Ertrag. Jedoch nicht jedes Portefeuille auf einer kritischen Linie ist auch effizient; denn es ist, wie bereits dargestellt, ein Portefeuille nur dann effizient, wenn zusätzlich zu jener Bedingung, die von allen auf der kritischen Linie liegenden Portefeuilles erfüllt wird, eine Steigerung des Ertrages nur bei gleichzeitiger

Abbildung 2-3: Kritische Linien, Isoertrags-und Isovarianzlinien.



Erhöhung des Risikos möglich ist. Wie aber aus Abbildung 2-3 hervorgeht, führt eine Bewegung auf der kritischen Linie ll von M in Richtung C zu Portefeuilles, deren Risiko bei sinkendem Ertrag steigt. Dies liegt darin begründet, daß jede Isovarianzellipse zwei Isoertragsgeraden mit verschiedenem Ertragsniveau tangiert. Effizient ist jedoch von diesen jeweils zwei Portefeuilles nur das mit dem

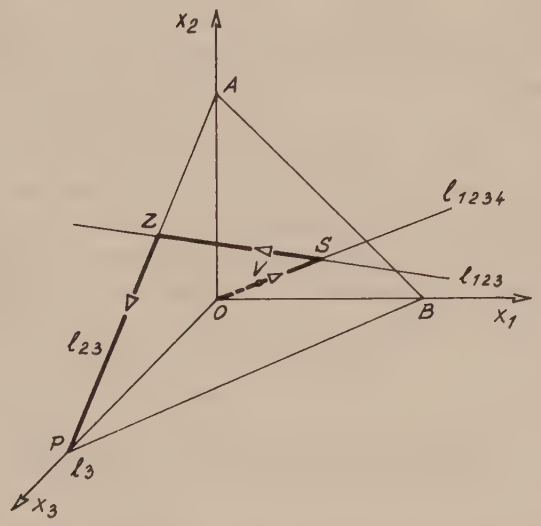
höchsten Ertrag. Dies ist in Abbildung 2-3 bei allen Portefeuilles vom Mittelpunkt M bis zum Punkt N der Fall. Auf der Strecke $\overline{MN}$ in Richtung von M nach N erhält man also Portefeuilles mit zunehmenden erwarteten Erträgen bei gleichzeitiger Vergrößerung des Risikos. Würde man von N aus auf der kritischen Linie ll in Richtung auf den Punkt F_3 gehen, so verläßt man den Bereich zulässiger Portefeuilles. Von hier ab liegen effiziente Portefeuilles auf einer neuen kritischen Linie, die durch die Abszissenachse (X_1) dargestellt wird.

Um den Bereich aller effizienten Portefeuilles abzugrenzen, bewegt man sich also von Punkt M aus auf der kritischen Linie ll in Abbildung 2-3 in Richtung zunehmender erwarteter Erträge, bis man infolge einer Nebenbedingung an die Grenze des zulässigen Bereichs stößt; dies ist in Abbildung 2-3 im Punkt N der Fall. Von jetzt an bewegt man sich auf einer neuen kritischen Linie, im vorliegenden Fall auf der Abszisse, ebenfalls in Richtung steigender erwarteter Erträge, und zwar bis an eine neue Grenze des zulässigen Bereichs. Dies ist in Abbildung 2-3 im Punkt P der Fall, der den größten zulässigen Ertrag E angibt. Hier ist keine weitere zu effizienten Portefeuilles führende Variation von Risiko und Ertrag E mehr möglich; d. h. das Risiko für das Portefeuille mit dem maximalen Ertrag ist gleich dem Risiko des Wertpapiers mit dem größten erwarteten Ertrag, da die ganze Kapitalsumme in dieses Wertpapier investiert wird.

Ein aus vier Wertpapieren bestehendes Portefeuille läßt sich analog den bisherigen Ausführungen im Raum darstellen. Die Menge der zulässigen Portefeuilles besteht dann aus Punkten in einem Tetraeder einschließlich der Begrenzungsflächen (vgl. Abbildung 2-4). Die geometrische Analyse von effizienten Portefeuilles beginnt in diesem Falle bei dem Portefeuille $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1$, das die kleinstmögliche Varianz repräsentiert.

In Abbildung 2-4 werden vier Wertpapiere betrachtet, deren Erträge und Varianzen folgende Rangordnung besitzen sollen: $(\mu_4, \sigma_{44}) \prec (\mu_1, \sigma_{11}) \prec (\mu_2, \sigma_{22}) \prec (\mu_3, \sigma_{33})$. Entsprechend den Ausführungen im 3-Wertpapierfall sind bei vier Wertpapieren statt Isovarianzellipsen Isovarianzellipsoide[1] gegeben; diese können geometrisch kaum mehr anschaulich dargestellt werden. Die Analyse wird daher gegenüber dem 3-Wertpapierfall dadurch vereinfacht, daß die erwarteten Portefeuilleerträge sowie deren Varianzen in Abbildung 2-4 nur noch durch die Lage der kritischen Linien und nicht mehr explizit dargestellt werden.

Abbildung 2-4: Die "Kritische Linienmethode".



1) Vgl. dazu W. NEUHAUS: Zur Planung effizienter Wertpapierportefeuilles, Diss. Köln 1968, S. 33.

Das Portefeuille mit der kleinsten Varianz (und dem kleinsten Ertrag) ist auf Grund der oben angegebenen Rangordnung festgelegt, indem die ganze Kapitalsumme in Wertpapier 4 investiert wird ($X_4 = 1$, $X_1 = X_2 = X_3 = 0$). Die geometrische Analyse der vier Wertpapiere im dreidimensionalen Koordinatensystem beginnt also im Nullpunkt O ($X_1 = X_2 = X_3 = 0$) und verläuft auf der durch O gehenden kritischen Linie l_{1234} in Richtung zunehmender Erträge. Im Punkt V in Abbildung 2-4 ist eine Wertekombination X_1, X_2, X_3, X_4 gegeben, in der jedes Wertpapier mit einem positiven Anteil vertreten ist. Dieser Punkt V liegt auf l_{1234} innerhalb des Tetraeders, berührt jedoch keine der Grenzflächen. Bewegt man sich auf l_{1234} weiter, so trifft man im Punkte S auf die Deckfläche ABP; in diesem Punkt ist der Anteil von Wertpapier 4 gleich O ($X_4 = 0$) geworden; d. h. die Kapitalsumme wird im Punkte S nur auf Wertpapier 1, 2 und 3 verteilt. Über den Punkt S kann nicht hinausgegangen werden, da sonst die Nichtnegativitätsbedingung (2.6) verletzt würde. Die kritische Linie l_{123} läuft in Pfeilrichtung, d. h. in Richtung zunehmender Erträge, auf der Deckfläche ABP und geht ebenfalls durch S; bewegt man sich auf l_{123} weiter, so trifft man in Z auf den Rand AP der Deckfläche ABP. In Z ist der Anteil des Wertpapiers X_1 auf Null gesunken. Soll der Portefeuilleertrag noch weiter gesteigert werden, so muß die Anteilskombination sich entlang der kritischen Linie l_{23} bewegen, die nun auf der Randstrecke $\overline{AP}$ verläuft. Im Schnittpunkt P ist auch der Anteil von Wertpapier 2 auf Null gesunken und damit das Portefeuille mit dem maximalen Ertrag erreicht.

Bei der rechnerischen Lösung geht man allerdings, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, genau umgekehrt vor. Man kann nämlich sehr leicht das Portefeuille mit dem maximalen Ertrag ohne Berücksichtigung des Risikos berechnen. Man beginnt also mit dem Portefeuille mit $E = E_{max}$ und bewegt sich zum Portefeuille mit $V = V_{min}$ hin.

Nachdem nun die wesentlichen Eigenschaften von E,V-effizienten Portefeuilles beschrieben wurden, wollen wir noch einige weitere Eigenschaften von effizienten E,V-Kombinationen anschneiden.

"Tragen wir punktweise die Werte für den erwarteten Ertrag und die Varianz in ein E,V-Koordinatensystem ein, so wird, solange wir uns auf der gleichen kritischen Linie befinden, die Beziehung zwischen dem erwarteten Ertrag und der Varianz durch eine Parabel dargestellt."[1)]

Bei der Bestimmung von effizienten Teilmengen 2. Ordnung folgt man also stückweise Geraden, bis man zu dem Punkt mit dem hächsten erwarteten Ertrag gelangt. Auf jedem Teilstück einer kritischen Linie wird die Beziehung zwischen E und V durch eine Parabel beschrieben (vgl. Abbildung 2-5[2)]).

In Abbildung 2-5 ist das Parabelsegment P_0P_1 dem Teil einer kritischen Linie zugeordnet, auf dem effiziente Portefeuilles liegen. Der restliche Teil der Parabel 1 zeigt die E,V-Kombination der auf dieser kritischen Linie liegenden nicht effizienten Punkte.[3)] Bei dem Schnittpunkt dieser kritischen Linie mit einer anderen werden die Beziehungen zwischen erwartetem Ertrag und Varianz durch die Parabel 2 beschrieben. Das Portefeuille, das dem Punkt P_1 zugeordnet wird, nennt MARKOWITZ "CORNER-PORTFOLIO".

Während jedoch der Schnittpunkt zweier kritischer Linien durch einen Knick gekennzeichnet ist, verläuft die E,V-Kurve (vgl. Abbildung 2-5) ohne Diskontinuität, da sich

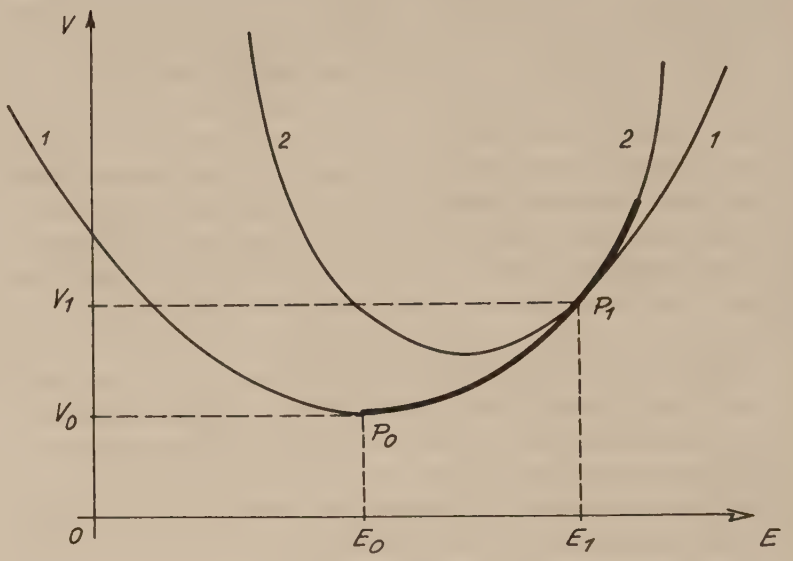
---

1) K. MICHAL: Portfolio Selection - Das Modell von MARKOWITZ und einige Erweiterungen -, Diplomarbeit am Institut für Statistik, München 1967, S. 28.

2) Vgl. K. MICHAL: Loc. cit., S. 28.

3) Vgl. K. MICHAL: Loc. cit., S. 28.

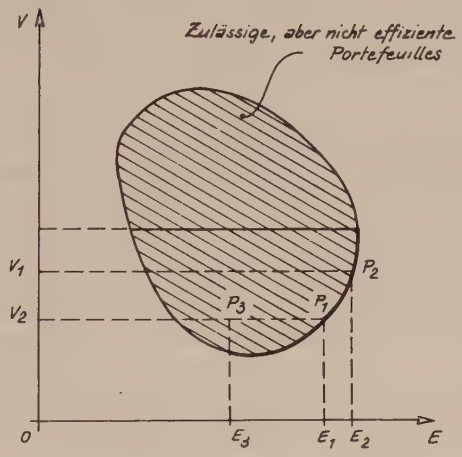
Abbildung 2-5: Erwarteter Ertrag und zugehörige Varianz entlang einer kritischen Linie.



die Parabeln nicht schneiden, sondern nur berühren.

In Abbildung 2-6 stellt die schraffierte Fläche die Menge der zulässigen, aber hinsichtlich dem zugehörigen erwarteten Ertrag und dessen Varianz nicht effizienten Portefeuilles dar. P_3 in Abbildung 2-6 ist deshalb nicht effizient, weil in P_1 bei gleichem Risiko ein höherer erwarteter Ertrag erzielt werden kann. Die Menge der hinsichtlich der erwarteten E,V-Kombinationen effizienten Portefeuilles

Abbildung 2-6: Die Menge der effizienten E,V-Kombinationen.



liegt in Abbildung 2-6 auf der stark ausgezogenen Begrenzungslinie.

An den in diesem Abschnitt gezeigten Beispielen von drei und vier Wertpapieren ist deutlich geworden, wie es möglich ist, E,V-effiziente Portefeuilles mit Hilfe der "Kritischen Linienmethode" zu berechnen. Im allgemeinen Fall mit n Wertpapieren im Portefeuille fährt man ausgehend von dem Portefeuille mit dem maximalen Ertrag von kritischer Linie zu kritischer Linie bis zu dem Portefeuille mit dem kleinsten Ertrag und dem geringsten Risiko fort. Die "Kritische Linienmethode" als Algorithmus erlaubt es, von Kosten und Kernspeicherplätzen eines Computers abgesehen, E,V-effiziente Portefeuilles für jede beliebige Anzahl von Wertpapieren zu berechnen.

2.1.5 Die "Kritische Linienmethode"[1)]

Ein Portefeuille wird durch den Spaltenvektor X dargestellt; dabei sind die X_i die Anteile der gesamten Anlagesumme, die in das i-te Wertpapier investiert werden. Die Anteilswerte X_i müssen allen modellbedingten und fakultativen Restriktionen genügen. Die X_i unterliegen also beispielsweise den folgenden Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad\quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad\quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad\quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

In diesem Gleichungssystem gibt m die Anzahl der Wertpapiere und $(n \cdot m)$ die Anzahl der fakultativen Nebenbedingungen an. Daneben gelten die modellbedingten Restriktionen (2.5) und (2.6). Eine Ungleichung in der Art der Nichtnegativitätsbedingung (2.6) muß durch die Einführung von Schlupfvariablen als Gleichung ausgedrückt werden.

Ein solches System von n Gleichungen wird in Matrizenschreibweise folgendermaßen geschrieben:

$$A \cdot X = b \quad \text{mit} \quad A = (a_{ik}),\ b' = (b_1 \ldots b_n),^{2)}$$
$$X' = (x_1 \ldots x_m).$$

---

1) Vgl. H.M. MARKOWITZ: Loc. cit., S. 170ff und Appendix A, B.

2) Die durch ' gekennzeichneten Vektoren und Matrizen sollen die transponierten Vektoren bzw. Matrizen darstellen. Vgl. auch S. 18 (2.4).

Der Erwartungswert des Ertrages eines Portefeuilles lautet dann in Matrizenschreibweise:

$$E = \mu' \cdot X.$$

Entsprechend ist die Matrizengleichung für die Varianz dieses Portefeuilleertrages:

$$V = X' \cdot C \cdot X.$$ [1)]

Für den Algorithmus der kritischen Linienmethode werden also neben dem Spaltenvektor X noch folgende Vektoren und Matrizen benötigt:

a) Die Kovarianzmatrix C; sie ist vom Typ (m, m), symmetrisch und positiv semi-definit,
b) der Ertragsvektor μ; es ist ein Spaltenvektor der Länge (m),
c) die Einschränkungsmatrix A; sie ist vom Typ (n, m),
d) der Einschränkungsvektor b; es ist ein Spaltenvektor der Länge (n).

Wie in der geometrischen Analyse E,V-effizienter Portefeuilles dargestellt wurde, arbeitet die "Kritische Linienmethode" von MARKOWITZ kontinuierlich stückweise lineare Mengen der überhaupt möglichen Portefeuilles heraus. Jede dieser so gewonnenen E,V-Kombinationen ist effizient. Die linearen Segmente der möglichen Portefeuilles werden als Folge von Iterationsschritten errechnet.

Bevor mit der Rechnung begonnen werden kann, müssen noch folgende zusammengesetzte Matrizen und Vektoren gebildet werden:

---

1) Vgl. auch S. 20 (2.7).

$$M = \begin{pmatrix} C & A' \\ A & O \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} O \\ b \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} \mu \\ O \end{pmatrix}.$$

Die Matrix M ist also vom Typ ((m+n),(m+n)) und immer symmetrisch. Werden keine fakultativen Restriktionen verwendet, dann ist M auch positiv semi-definit. R wird aus einem Nullvektor der Länge (m) und dem Einschränkungsvektor b, S aus dem Vektor μ und einem Nullvektor der Länge (n) zusammengesetzt. R und S sind also Spaltenvektoren der Länge (m+n).

In der t-ten Iteration, d. h. entlang des t-ten Segments, sind I_t Variable in der Indexmenge $\varphi(t)$ enthalten. $M_{\varphi(t)}$ ist eine $((I_t + n), (I_t + n))$-Matrix, die aus M durch Streichen der Zeilen und Spalten von Variablen, die nicht in der Indexmenge enthalten sind, gewonnen wird. $R_{\varphi(t)}$ ist ein $(I_t + n)$-Vektor, der I_t Nullen enthält. $S_{\varphi(t)}$ ist ein $(I_t + n)$-Vektor, bei dem $(m - I_t)$ μ_i, das sind die Erträge, die nicht in der Indexmenge enthalten sind, gestrichen wurden. Für jede Nebenbedingung wird ein LAGRANGE'scher Multiplikator eingeführt. Diese n-Multiplikatoren bilden den Spaltenvektor λ. Zusätzlich wird noch eine Zahl λ_E als (n + 1)-ster LAGRANGE'scher Multiplikator definiert. Die Formel für das t-te Segement der Menge der effizienten Portefeuilles lautet dann in Matrizenschreibweise:

$$M_{\varphi(t)} \cdot \begin{bmatrix} X_{\varphi(t)} \\ \lambda \end{bmatrix} = R_{\varphi(t)} + \lambda_E \cdot S_{\varphi(t)},$$

wobei die Anteilswerte der Variablen, die nicht in der Indexmenge enthalten sind, gleich O sind.

Des besseren Verständnisses wegen wird im folgenden das numerische Beispiel von MARKOWITZ mit zur Erklärung herangezogen. Durchgerechnet wurden die Werte des Beispiels mit

Hilfe eines Fortran-IV-Programms;[1] die Ausgabe dieses Programmes wird jeweils an den entsprechenden Stellen als Schema in den Text eingefügt.

In dem Beispiel von MARKOWITZ ist m gleich 3 und n gleich 1. Ausgegangen wird von dem Ertragsvektor μ, der die Erträge der betrachteten Aktien angibt. Aus diesem Vektor μ und einem Hilfsvektor der Länge (n), dessen Elemente sämtlich aus der Zahl null bestehen, wird der in der Rechnung verwendete Spaltenvektor S zusammengesetzt. Ein zweiter in der Rechnung verwendeter Vektor R wird aus einem Hilfsvektor der Länge (m), dessen Elemente ebenfalls nur aus der Zahl null bestehen, und dem Einschränkungsvektor b zusammengesetzt. Da n gleich 1 ist, besteht der Einschränkungsvektor b in dem numerischen Beispiel von MARKOWITZ wegen (2.5) lediglich aus der Komponente 1.

In Schema 1 werden von links nach rechts der Ertragsvektor μ, der Spaltenvektor S, der Spaltenvektor R und die Namen der betrachteten Aktien dargestellt.

Schema 1:

$$\mu = \begin{pmatrix} 0{,}062 \\ 0{,}146 \\ 0{,}128 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 0{,}062 \\ 0{,}146 \\ 0{,}128 \\ 0{,}0 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 1{,}0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{AKTIE 1} \\ \text{AKTIE 2} \\ \text{AKTIE 3} \end{matrix}$$

Die Ausgangsmatrix M setzt sich aus der Kovarianzmatrix C, aus der Einschränkungsmatrix A und der transponierten Einschränkungsmatrix A', sowie einer Matrix, deren Elemente null sind, zusammen. Da in dem Beispiel nur die modellbedingten Restriktionen gelten, ist die Einschränkungsmatrix A ein Vektor der Länge (n), dessen Elemente den Wert 1 an-

1) Vgl. dazu die im Eingabeteil etwas andere Programmversion, die als Tabelle 13* auf S. 28* bis S. 47* angegeben ist.

nehmen. Die Ergänzungsmatrix, deren Elemente null sind, hat aus diesem Grunde nur ein Element mit dem Wert null. In Schema 2 werden von oben nach unten die Kovarianzmatrix C und die Ausgangsmatrix M gezeigt.

Schema 2:

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}0146 & 0{,}0187 & 0{,}0145 \\ 0{,}0187 & 0{,}0854 & 0{,}0104 \\ 0{,}0145 & 0{,}0104 & 0{,}0289 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}0146 & 0{,}0187 & 0{,}0145 & 1{,}0 \\ 0{,}0187 & 0{,}0854 & 0{,}0104 & 1{,}0 \\ 0{,}0145 & 0{,}0104 & 0{,}0289 & 1{,}0 \\ 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 0{,}0 \end{pmatrix}$$

Die rechnerische Lösung beginnt nun, wie bereits früher ausgeführt wurde, mit dem Portefeuille, das den maximalen erwarteten Ertrag besitzt. In dem Beispiel von MARKOWITZ enthält das erste effiziente Portefeuille nur die Aktie 2; sie bezeichnet man als "in". Alle anderen Wertpapiere (Variablen) sind im Augenblick nicht in die Betrachtung einbezogen. Derartige Variablen bezeichnet MARKOWITZ als "out". Wir sprechen im folgenden von Variablen, die innerhalb der Basis oder außerhalb der Basis sind. In der Matrix M müssen von der Diagonale ausgehend die Zeilen und Spalten aller Variablen, die nicht in der Basis sind, null gesetzt werden. Da eine solche Matrix aber nicht mehr invertierbar ist, ersetzt man auf der Diagonalen die herausgestrichenen Variablen durch den Wert 1. Diese Matrix bezeichnet MARKOWITZ als $\tilde{M}$; sie kann invertiert werden. In Schema 3 werden, wieder von oben nach unten, $\tilde{M}$ und deren Inverse $\tilde{M}^{-1}$ gezeigt.

Um die für den Algorithmus der "Kritischen Linienmethode" benötigte Startmatrix N(1) zu bekommen, müssen in $\tilde{M}^{-1}$ auf der Diagonalen die vorher eingesetzten Einheitselemente

Schema 3:

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0854 & 0,0 & 1,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 & -0,0854 \end{pmatrix}$$

wieder durch Nullen ersetzt werden.

In Schema 4 wird die Startmatrix N(1) dargestellt.

Schema 4:

$$N(1) = \begin{pmatrix} 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 & -0,0854 \end{pmatrix}$$

Bei jeder Iteration wird nun die N(t)-Matrix in die N(t+1)-Matrix verändert. Der Algorithmus der "Kritischen Linienmethode" faßt dabei die Umwandlung der M-Matrix in die jeweilige $\tilde{M}$-Matrix[1], die Inversion der $\tilde{M}$-Matrix und die anschließende Umwandlung der $\tilde{M}^{-1}$-Matrix in die N(t)-Matrix zusammen.[2] Gesteuert wird der ganze Prozeß über kritische Linien, da man ja wissen muß, welche Variablen gerade in der Basis sind und welche als nächste hereinkommen oder gestrichen werden sollen.

---

1) H.M. MARKOWITZ: Loc. cit., zeigt auf S. 175, S. 313 und S. 332, daß bei seinem Rechenverfahren keine singulären $\tilde{M}$-Matrizen vorkommen können.

2) Die allgemeinen Umformungsregeln können bei MARKOWITZ: Loc. cit., S. 181, im Falle der Streichung einer Variablen aus der Basis auf S. 184 nachgelesen werden.

Die Matrizengleichung für eine kritische Linie läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$\begin{pmatrix} X \\ \lambda \end{pmatrix} = N(t) \cdot R + N(t) \quad S \cdot \lambda_E .$$

In dieser Matrizengleichung sind N(t), R und S bekannte Matrizen bzw. Vektoren. Wird für λ_E ein spezieller Wert in die Matrizengleichung eingesetzt, so läßt sich das der Matrizengleichung zugrunde liegende Gleichungssystem auflösen. Der Ergebnisvektor auf der linken Seite der Matrizengleichung setzt sich aus dem Spaltenvektor X und dem Spaltenvektor λ zusammen. Der Spaltenvektor X beinhaltet die Investitionsanteile, d. h. jene Anteile der Kapitalsumme, die in die einzelnen Aktien investiert werden sollen. Der Vektor λ beinhaltet die sich numerisch ergebenden LAGRANGEschen Multiplikatoren, die bei der Auflösung von restringierten Gleichungssystemen verwendet werden. Da in dem Beispiel von MARKOWITZ außer der Nichtnegativitätsbedingung (2.6) nur die Nebenbedingung (2.5) gilt, besteht der Spaltenvektor λ in diesem Beispiel immer nur aus einer Zahl.

Auf der ersten kritischen Linie, die wir mit 1_2 bezeichnen, da in dem Beispiel Aktie 2 den größten erwarteten Ertrag hat, kann zur Auflösung des der Matrizengleichung für 1_2 zugrunde liegenden Gleichungssystems jeder Wert für λ_E eingesetzt werden. MARKOWITZ bezeichnet deshalb eine solche kritische Linie als degeneriert. Da λ_E später von $+\infty$ nach 0 variiert werden soll, nimmt man zweckmäßigerweise an, daß der Wert von λ_E der ersten kritischen Linie $+\infty$ sei.

Die Werte der X_i in dem aufgelösten Gleichungssystem sehen wir in dem Portefeuillevektor Nr. 1 in Schema 5. Darunter sehen wir die Gewinnerwartung und das Risiko dieses so zusammengestellten Portefeuilles.

Schema 5:

PORTEFEUILLEVEKTOR NR: 1

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0 \\ 1,0 \\ 0,0 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 0,0\% \\ 100,0\% \\ 0,0\% \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{AKTIE 1} \\ \text{AKTIE 2} \\ \text{AKTIE 3} \end{matrix}$$

GEWINNERWARTUNG: 0,1460

RISIKO (VARIANZ): 0,0854

Der nächste Schritt besteht in der Feststellung eines neuen Wertes von λ_E, bei dem die erste kritische Linie, in dem Beispiel also l_2, von einer neuen kritischen Linie geschnitten wird; dabei müssen alle Variablen der ersten kritischen Linie in der Basis sein, eine Variable hereinkommen und alle anderen Variablen draußen sein. Die effizienten Punkte liegen jetzt auf der kritischen Linie, die l_2 beim nächst größeren Wert von λ_E schneidet. Da Aktie 2 in der Basis ist, muß geprüft werden, ob λ_E größer ist, wenn Aktie 1 oder Aktie 3 in die Basis geholt wird. Das geschieht dadurch, daß man $\eta_{j0} = 0$ bestimmt, indem nacheinander alle Variablen durchprobiert werden, die noch nicht in der Basis sind:

$$\eta_{j0} = 0 \text{ für irgendein } {}_{j0} \notin \varphi(t);$$

dabei ist:

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{m} \sigma_{jk} X_k + \lambda - \lambda_E \mu_j.$$

In Schema 6 sehen wir die Werte für λ_E, wenn Variable 1 oder wenn Variable 3 in die Basis geholt wird.

Schema 6:

$\lambda_E(1)$: 0,7940 PRUEFEN, OB REINHOLEN VON PAPIER NR: 1
$\lambda_E(3)$: 4,1667 PRUEFEN, OB REINHOLEN VON PAPIER NR: 3

Wie wir an dem Beispiel von MARKOWITZ sehen, ist λ_E größer, wenn die Variable 3 in die Basis hereingeholt wird. In der (t+1)-ten Iteration wird also Wertpapier j_0 in die Basis hereingenommen. N(1) muß nun entsprechend abgeändert werden, um N(2) zu erhalten. Wir bewegen uns jetzt auf der kritischen Linie l_{23}. In Schema 7 wird die Iterationsmatrix N(2) dargestellt.

Schema 7:

$$N(2) = \begin{pmatrix} 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 10,6952 & -10,6952 & 0,1979 \\ 0,0 & -10,6952 & 10,6952 & 0,8021 \\ 0,0 & 0,1979 & 0,8021 & -0,0252 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung für die zweite kritische Linie, in dem Beispiel von MARKOWITZ also l_{23}, lautet:

$$\begin{pmatrix} X \\ \lambda \end{pmatrix} = N(2) \cdot R + N(2) \cdot S\, \lambda_E .$$

Setzen wir für λ_E den Wert 4,1667 in diese Matrizengleichung ein, so erhalten wir den in Schema 8 dargestellten Portefeuillevektor Nr. 2. Da in diesem Portefeuillevektor mehr als eine Aktie enthalten ist, muß die Gewinnerwartung nach Formel (2.4) und das Risiko nach Formel (2.7) ausgerechnet werden. Gewinnertrag und Risiko werden im Schema 8 unter dem Portefeuillevektor Nr. 2 angegeben.

Schema 8:

PORTEFEUILLEVEKTOR NR: 2

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0 \\ 0,225 \\ 0,775 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 0,0\% \\ 22,5\% \\ 77,5\% \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{AKTIE 1} \\ \text{AKTIE 2} \\ \text{AKTIE 3} \end{matrix}$$

GEWINNERWARTUNG: 0,1320

RISIKO (VARIANZ): 0,0253

Das Portefeuille im Schnittpunkt der ersten und zweiten kritischen Linie muß identisch sein für $\lambda_E = \lambda_E(1)$. Durch die Gleichung der zweiten kritischen Linie sind die effizienten Punkte von $\lambda_E(2)$ an bis zum nächst kleineren Wert von λ_E bestimmt, bei welchem die zweite kritische Linie von einer anderen kritischen Linie geschnitten wird. Jetzt kann allerdings eine Variable in die Basis hereinkommen oder eine Variable aus der Basis gestrichen werden, je nachdem, wodurch sich der nächst kleinere Wert von λ_E ergibt. Im Falle der Streichung einer Variablen wird wieder durchprobiert (mit Ausnahme der zuletzt hereingekommenen Variablen) bei $X_{j0} = 0$, wann λ_E maximal wird:

$$X_{j0} = 0 \text{ für irgendein } j_0 \in \varphi(t);$$

die vorhandenen Variablen in der (t+1)-ten Iteration sind dieselben wie bei der t-ten Iteration mit Ausnahme der Variablen j_0. Versuchen wir Variable 2 aus der Basis zu streichen, so ergibt sich ein negatives λ_E. λ_E darf aber nicht negativ werden, also muß Wertpapier 1 bei einem λ_E von 0,1408 mit der nächsten Iteration in die Basis hereingenommen werden. Wir bewegen uns jetzt auf der kritischen Linie l_{123}. Als nächstes muß jetzt die Iterationsmatrix N(3) bestimmt werden. Wir sehen sie in Schema 9.

Schema 9:

$$N(3) = \begin{pmatrix} 111,2487 & -27,0090 & -84,2396 & 1,1023 \\ -27,0090 & 17,2525 & 9,7566 & -0,0698 \\ -84,2396 & 9,7566 & 74,4831 & -0,0326 \\ 1,1023 & -0,0698 & -0,0326 & -0,0143 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung für die kritische Linie l_{123} lautet:

$$\begin{pmatrix} X \\ \lambda \end{pmatrix} = N(3) \cdot R + N(3) \cdot S \cdot 0,1408.$$

Durch Auflösen dieser Matrizengleichung erhalten wir den Portefeuillevektor Nr. 3.

In Schema 10 werden der Portefeuillevektor Nr. 3, Gewinnerwartung und Risiko dieses Portefeuilles angegeben.

Schema 10:

PORTEFEUILLEVEKTOR NR: 3

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8414 \\ 0,0 \\ 0,1586 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 84,14\% \\ 0,0\ \% \\ 15,86\% \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{AKTIE 1} \\ \text{AKTIE 2} \\ \text{AKTIE 3} \end{matrix}$$

GEWINNERWARTUNG: 0,0725

RISIKO (VARIANZ): 0,0149

Da nun alle Variablen in der Basis sind,[1] muß diejenige Variable aus der Basis gestrichen werden, bei deren Streichung sich das nächst kleinere positive λ_E ergibt. Dies ist bei einem Wert von 0,03333 für λ_E bei Streichung der Variablen 2 der Fall. Wir bewegen uns nun auf der kritischen Linie l_{13}. Jetzt muß die Iterationsmatrix N(4) bestimmt werden. Sie wird in Schema 11 dargestellt.

1) Die Variablen dürfen nicht mit den Investitionsanteilen verwechselt werden.

Schema 11:

$$N(4) = \begin{pmatrix} 68{,}9655 & 0{,}0 & -68{,}9655 & 0{,}9931 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ -68{,}9655 & 0{,}0 & 68{,}9655 & 0{,}0069 \\ 0{,}9931 & 0{,}0 & 0{,}0069 & -0{,}0146 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung für die kritische Linie l_{13} lautet:

$$\begin{pmatrix} X \\ \lambda \end{pmatrix} = N(4) \cdot R + N(4) \cdot S \cdot 0{,}03333.$$

Durch Auflösen dieser Matrizengleichung erhält man den Portefeuillevektor Nr. 4. In Schema 12 werden Portefeuillevektor Nr. 4, die zugehörige Gewinnerwartung und das zugehörige Risiko angegeben.

Schema 12:

PORTEFEUILLEVEKTOR NR: 4

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9931 \\ 0{,}0 \\ 0{,}0069 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 99{,}31\% \\ 0{,}0\ \% \\ 0{,}69\% \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{AKTIE 1} \\ \text{AKTIE 2} \\ \text{AKTIE 3} \end{matrix}$$

GEWINNERWARTUNG: 0,0625

RISIKO (VARIANZ): 0,0146

Der Iterationsprozeß springt nun solange weiter von kritischer Linie zu kritischer Linie, bis ein λ_E kleiner oder gleich null ist. Nun kann entweder Variable 1 oder Variable 3 aus der Basis gestrichen werden. In jedem Falle ergibt sich aber ein negatives λ_E. Der Iterationsprozeß ist somit beendet.

Der Iterationsprozeß beginnt mit $\lambda_E = +\infty$ und endet bei $\lambda_E = 0$; dabei können folgende Erwartungsfälle auftreten:

a) Es ergeben sich X_i, die kleiner als null sind; dann muß abgebrochen werden, da sonst der Iterationsprozeß außer Kontrolle gerät;

b) ein λ_E von (t+1) ist größer als ein λ_E von (t); dann muß ebenfalls abgebrochen werden, weil die nächste Iterationsmatrix N(t) nicht mehr invertierbar ist;

c) der Prozeß wird zyklisch; d. h. man kommt immer wieder auf die gleichen kritischen Linien zurück. Dieser Fall ist verhältnismäßig selten und kann meistens durch programmtechnische Mittel behoben werden.

2.2 Das Modell von SHARPE

Ein einfaches Indexmodell wurde von SHARPE[1] entwickelt; es verwendet einen Index zur Schätzung von Wertpapiererträgen sowie den Kovarianzen zwischen diesen Erträgen. Von einigen Voraussetzungen abgesehen, gelten für das "Diagonalmodell"[2] die gleichen Rechenverfahren wie für das Modell von MARKOWITZ.

Der erwartete Ertrag eines Portefeuilles ist wiederum:

$$(2.4) \qquad E = \sum_{i=1}^{m} X_i \mu_i .$$

---

1) W.F. SHARPE: A Simplified Model for Portfolio Analysis, in: Management Science, Vol. 9 1963, S. 277-293.

2) Da bei dem Modell von SHARPE in der Kovarianzmatrix nur die Diagonale besetzt ist, wird es häufig auch als Diagonalmodell bezeichnet.

Die Varianz dieses Ertrages ist dann:

$$(2.7) \quad V = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} X_i X_j \sigma_{ij}.$$

Betrachten wir die LAGRANGEfunktion:

$$(2.9) \quad \emptyset = \lambda E - V = \lambda \sum_{i=1}^{m} X_i \mu_i - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} X_i X_j \sigma_{ij}$$

für eine gegebene Menge von Werten für Parameter λ, μ_i und σ_{ij}, so kann der Wert von $\emptyset$ durch Variation der X_i verändert werden, wobei wieder die früher genannten Nebenbedingungen (2.5) und (2.6) gelten.

Variiert man wiederum λ von $+\infty$ nach 0, so erhält man jede mögliche Lösung der Funktion $\emptyset$ oder jede Teilmenge 2. Ordnung, d. h. alle effizienten Portefeuilles.

Der Vorteil des Diagonalmodells liegt, neben der etwas einfacheren Eingabedatenprognose, vor allem in der einfacheren Zusammensetzung der Kovarianzmatrix. Bei der kritischen Linienmethode muß für jedes Eckportefeuille eine Matrix invertiert werden; da diese bei dem einfachen Indexmodell nur eine Diagonalmatrix ist, wird bei Benutzung des Diagonalmodells viel Rechenzeit und bei Benutzung eines EDV-Programmes viel Kernspeicherplatz eingespart.

Dieser Vorteil muß durch einige stark vereinfachende Annahmen erkauft werden. Die wichtigste dieser Annahmen besagt, daß die Erträge der verschiedenen Wertpapiere durch gemeinsame Beziehungen mit nur einer einzigen Einflußgröße verbunden sind. Das heißt also, daß der Ertrag eines jeden Wertpapiers nur durch diese einzige Einflußgröße und zu-

sätzlich noch durch Zufallsschwankungen bestimmt wird.[1)]

Formelmäßig läßt sich diese Bedingung wie folgt darstellen:

$$(2.10) \quad e_i = A_i + B_i \cdot I + C_i, \; i=1, \ldots, m.$$

In dieser Gleichung sind die A_i und B_i Parameter, und zwar ist A_i jeweils der Achsenabschnitt auf der Ordinate und B_i jeweils die Steigung einer Geraden, die durch die Regression des Ertrags e_i auf den Index I ermittelt werden. C_i ist eine Zufallsvariable mit dem Erwartungswert von 0 und einer Varianz von Q_i[2)]. I ist irgendein noch näher zu erläuternder Indexwert. Dieser Indexwert wird als Haupteinflußgröße für die Erträge von Wertpapieren betrachtet. Die zukünftige Höhe von I wird nur von Zufallseinflüssen bestimmt:

$$(2.11) \quad I = A_{m+1} + C_{m+1}.$$

Hierbei ist A_{m+1} wieder ein Parameter und C_{m+1} eine Zufallsvariable mit einem Erwartungswert von 0 und einer Varianz von Q_{m+1}. Des weiteren wird angenommen, daß die Kovarianz zwischen C_i und C_j für alle Werte von i und j ($i \neq j$) gleich 0 ist. Der Achsenabschnitt A_i und die Steigung B_i sind die Parameter der Geraden, die den Erwartungswert μ_i der Wertpapiererträge e_i mit dem Wert des gewählten Index verbinden. Q_i ist die Varianz von μ_i, wobei angenommen wird, daß diese Varianz für jeden Punkt auf der Geraden die gleiche ist; es soll also Homoskedastizität bestehen. Es gelten dann folgende Beziehungen:

---

1) Vgl. W.F. SHARPE: Loc. cit., S. 281.

2) Die Varianz Q_i wird später noch genauer erklärt, vgl. dazu auch Abbildung 2-7.

$$(2.12) \quad \mu_i = A_i + B_i \cdot (A_{m+1}),$$

$$(2.13) \quad V_i = (B_i)^2 \cdot (Q_{m+1}) + Q_i,$$

$$(2.14) \quad C = (B_i) \cdot (B_j) \cdot (Q_{m+1}).$$

In Abbildung 2-7 werden diese Beziehungen dargestellt.

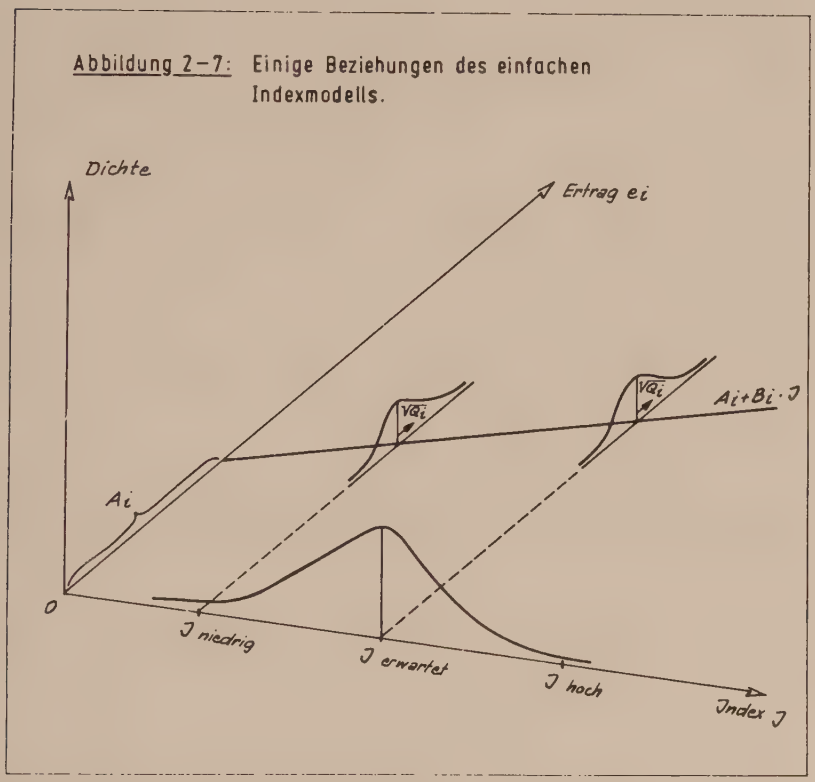


Abbildung 2-7: Einige Beziehungen des einfachen Indexmodells.

Praktisch werden die benötigten Parameter, wie im folgenden beschrieben, nach der Methode der "Kleinsten Quadratsumme" geschätzt.

Drei Werte von einem Index, der als Haupteinflußgröße die Wertpapierkurse[1] beeinflußt, werden festgelegt. Ein Wertpapieranalytiker schätzt nun zu jedem Indexstand die seiner Meinung nach in einem bestimmten Zeitraum eintretenden Kurshöhen eines konkreten Wertpapiers, und zwar schätzt er zu jedem Indexstand drei Kurshöhen mit jeweils verschiedener Wahrscheinlichkeit, wobei er eine erwartete, eine pessimistische und eine optimistische Kurshöhe schätzt. Die Kurshöhe ist also eine Zufallsvariable, wobei allerdings subjektive Wahrscheinlichkeiten in die Betrachtung eingehen. Es können nun drei Geraden mit einer gleichen gemeinsamen Steigung bestimmt werden; sie sollen den Zusammenhang zwischen Kurshöhe und I ausdrücken. Eine Gerade wird durch die erwarteten Kurshöhen, eine Gerade durch die pessimistischen Kurshöhen und eine Gerade durch die optimistischen Kurshöhen des Wertpapiers bei dem entsprechenden Indexstand gelegt. Zur Schätzung des Erwartungswertes des Ertrages eines Wertpapiers wird von dem linearen Modell jene Gerade benützt, die durch die erwarteten Kurshöhen gelegt wurde.

Die Parameter der wegen ihrer gemeinsamen Steigung parallelen Geraden werden simultan durch Minimierung der folgenden Funktion gewonnen:[2]

$$(2.15) \qquad \sum_{i=1}^{3} \left[(K_i^- - A^- - B \cdot I_i)^2 + (K_i^0 - A^0 - B \cdot I_i)^2 + (K_i^+ - A^+ - B \cdot I_i)^2 \right] = \text{Minimum.}$$

1) Die Dividenden bzw. Zinsen eines Wertpapiers können recht gut vorausgesagt werden; deshalb zieht man in dem einfachen Indexmodell nur die Wertpapierkurse in die Regressionsrechnung mit ein, A. d. V.

2) Vgl. dazu: IBM 1401 Portfolio Selection Program (1401-FI-04X), Program Reference Manual, o.V., New York 1962, IBM Application Program H20-0127-1, S. 76f.

Durch partielle Ableitung nach B, A^-, A^O und A^+ erhält man folgende vier Bestimmungsgleichungen für die Geradenparameter:

$$(2.16)\quad 3B \cdot \sum_{i=1}^{3} I_i^2 + (A^- + A^O + A^+) \cdot \sum_{i=1}^{3} I_i - \sum_{i=1}^{3} I_i \cdot (K_i^- + K_i^O + K_i^+) = 0,$$

$$(2.17)\quad B \cdot \sum_{i=1}^{3} I_i + 3A^- - \sum_{i=1}^{3} K_i^- = 0,$$

$$(2.18)\quad B \cdot \sum_{i=1}^{3} I_i + 3A^O - \sum_{i=1}^{3} K_i^O = 0,$$

$$(2.19)\quad B \cdot \sum_{i=1}^{3} I_i + 3A^+ - \sum_{i=1}^{3} K_i^+ = 0.$$

Durch Auflösung dieses Gleichungssystems ergeben sich für die vier gesuchten Parameter folgende Lösungen:

$$(2.20)\quad B = \frac{3 \sum_{i=1}^{3} I_i (K_i^- + K_i^O + K_i^+) - \sum_{i=1}^{3} I_i \cdot \sum_{i=1}^{3} (K_i^- + K_i^O + K_i^+)}{3 \sum_{i=1}^{3} I_i^2 - (\sum_{i=1}^{3} I_i)^2} \cdot \frac{1}{3},$$

$$(2.21)\quad A^- = \frac{1}{3}\left[\sum_{i=1}^{3} K_i^- - B \cdot \sum_{i=1}^{3} I_i\right],$$

$$(2.22)\quad A^O = \frac{1}{3}\left[\sum_{i=1}^{3} K_i^O - B \cdot \sum_{i=1}^{3} I_i\right],$$

$$(2.23)\quad A^+ = \frac{1}{3}\left[\sum_{i=1}^{3} K_i^+ - B \cdot \sum_{i=1}^{3} I_i\right].$$

Zur weiteren Vereinfachung werden folgende Abkürzungen vereinbart:

$$K = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} K_i^O \text{ und } I = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} I_i.$$

Der Abstand[1] zwischen den durch die hohen und durch die niedrigen Kurse gelegten Geraden ist: $|A^+ - A^-|$. Es wird angenommen, daß der Kursschwankungsparameter[2] K_S gleich $\frac{1}{2} \cdot |A^+ - A^-|$ ist. Die lineare Funktion, die die Kurse mit dem Index verknüpft, ist:

(2.24) $K = A + B \cdot I$; hierbei ist $A = A^0$.

Die Gleichung für den erwarteten Ertrag[3] e ist dann:

$$(2.25) \quad e = \frac{(A + B \cdot I - K_{t-1}) + Div + Boni}{K_{t-1}}^{4)} \cdot 100 [\%] .$$

Die oben genannte Funktion gilt für jeden Wert des Index I, wenn auch die Hauptbedeutung von I wohl in der Umgebung seines Erwartungswertes E(I) liegen dürfte.

Der Achsenabschnitt A gibt den Ertrag an, bei dem der Wert des Index gegen 0 geht; ökonomische Bedeutung bekommt dieser mathematischen Interpretation von A allerdings nicht zu. Nun wird für den Erwartungswert E(I) des Index der Erwartungswert μ für den Ertrag ausgerechnet.

$$(2.26) \quad \mu = \frac{(A + B \cdot E(I) - K_{t-1}) + Div + Boni)}{K_{t-1}}^{5)} 100 [\%] .$$

---

1) Geometrisch betrachtet ist es nicht der Abstand, sondern ein mit $\cos \Psi$ multiplizierter Abstand, was weiter keine Bedeutung hat.

2) Im IBM 1401 Manual, loc. cit., S. 77 wird dieser Parameter als Price Spread Parameter bezeichnet.

3) Die Berücksichtigung von Steuern bleibt hier der Einfachheit halber weg.

4) Bei festverzinslichen Wertpapieren sind statt der Dividenden und der Boni Zinsen zu berücksichtigen, vgl. S. 16.

5) Bzw. + Zinsen, K_{t-1} entspricht dem Tageskurs.

Für die Varianz des Ertrages e gilt folgendes:

$$(2.27) \quad V(e) = \left(\frac{Ks}{K_{t-1}}\right)^2 - \left(\frac{B}{K_{t-1}}\right)^2 \cdot \left(\frac{Is}{C}\right)^2;$$

dabei ist Is gleich der Schwankungsbreite des Index, angepaßt durch das C-fache der Standardabweichung (C = 1,2,3). C wird als Faktor für das Verträglichkeitsmaß bezeichnet.

Dazu noch einige Anmerkungen:[1] Hat man eine lineare Funktion $y = n + mx$, wobei n und x stochastisch unabhängige Zufallsvariable darstellen, deren Korrelationskoeffizient in dem einfachen Indexmodell 0 sein muß, was tatsächlich nicht immer gegeben ist,[2] so gilt $V(y) = V(n) + m^2 V(x)$. Ist noch eine zweite lineare Funktion $y' = n' + m'x$ gegeben, für die n' und x stochastisch unabhängige Zufallsvariable darstellen, wobei x dieselbe Zufallsvariable wie in der ersten Gleichung, nämlich den Index darstellt, so gilt, wenn der Korrelationskoeffizient zwischen n und n' = 0[3] ist: $Cov(y,y') = mm' \cdot V(x)$. Daraus geht hervor, daß die Korrelation bzw. Kovarianz zwischen linearen Funktionen stark von deren Steigungen beeinflußt wird. Die oben genannte Formel für die Kovarianz zwischen Funktionen mehrerer Zufallsvariablen soll nun abgeleitet werden. Definiert man die Varianz einer diskreten Zufallsvariablen als:

$$(2.28) \quad V(x) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

und setzt diesen Ausdruck in die Gleichung für die Kovarianz ein, so ergibt sich:

---

1) Vgl. IBM 1401 Manual, loc. cit., S. 78.

2) Der Verf. hat einige Beispiele durchgerechnet.

3) Diese Bedingung ist oft tatsächlich nicht erfüllt.

$$(2.29)\quad \mathrm{Cov}(y,y') = \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})(y_i'-\bar{y}')$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} y_i y_i' - n\bar{y}\bar{y}'\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}(n_i+mx_i)(n_i'+m'x_i)-n(\bar{n}+m\bar{x})(\bar{n}'+m'\bar{x})\right\}$$

$$= \mathrm{Cov}(n,n')+\underbrace{m'\mathrm{Cov}(n,x)+m\ \mathrm{Cov}(n',x)}_{\text{Ausdruck } z^*}+mm'v(x).$$

Das heißt aber, der ganze Ausdruck z* muß zusammen 0 sein, oder aber jede der einzelnen Kovarianzen in diesem Ausdruck z* muß 0 sein; denn dann und nur dann gilt die genannte Formel für die Kovarianz von linearen Funktionen. Bei der Verwendung von insgesamt nur 9 Werten für jedes Wertpapier ist das selten der Fall; denn streng genommen könnten die Summen nur bei einer großen Zahl von Werten für die Schätzung verwendet werden.

2.3 Das Multi-Index-Modell der Kovarianzform

Da das Modell von MARKOWITZ, was die praktische Anwendbarkeit betrifft, wegen der hohen Rechenkosten noch keine befriedigende Lösung des Portfolio Selection-Problems ist und das einfache Indexmodell doch sehr stark einschränkende, d. h. wirklichkeitsfremde Annahmen voraussetzt, haben Autoren wie COHEN und POGUE sich mit den Möglichkeiten von Multi-Index-Modellen auseinandergesetzt.[1)]

1) Vgl. K.J. COHEN und J.A. POGUE: An Empirical Evaluation of Alternative Portfolio-Selection Models, in: The Journal of Business, Vol. 40 1967, S. 166-193.

Sie haben zwei Formen von Multi-Index-Modellen entwikkelt:

a) Die Kovarianzform und
b) die Diagonalform.

Bei beiden Formen dieser Multi-Index-Modelle werden statt einem einzigen Wertpapierindex mehrere Indizes verwendet. Werden außer Aktien in die Betrachtung auch festverzinsliche Wertpapiere einbezogen, so werden zur Analyse jeder Klasse von Wertpapieren besondere Indizes herangezogen. Sowohl bei der Kovarianzform als auch bei der Diagonalform werden diese Indizes im Zusammenhang mit den Kovarianzen der erwarteten Wertpapiererträge betrachtet.

Für die Kovarianzform kann die volle Kovarianzmatrix, die den Zusammenhang zwischen den Indizes ausdrückt, angegeben werden. Innerhalb jeder Klasse von Wertpapieren wird dann analog dem einfachen Indexmodell verfahren.

Die Teilmenge 1. Ordnung, d. h. die untersuchten Wertpapiere, wird hier in M Klassen bzw. Branchen unterteilt. Es wird angenommen, daß die Beziehung zwischen dem Ertrag eines einzelnen Wertpapiers und dem zugehörigen Klassenindex linear ist:

$$(2.30) \quad e_i = A_i + B_i I_j + C_i, \quad \text{für alle } i \in N_j.$$

Hier ist N_j die Menge der Wertpapierindizes in der Klasse j, für j=1, ..., M. I_j ist die zukünftige Höhe des j-ten Klassenindex, wobei gilt: $I_j = A_{N+j} + C_{N+j}$, für j=1, ..., M. Des weiteren werden noch folgende Annahmen gemacht, die grundsätzlich schon bekannt sind:

$$(2.31) \quad E(C_i) = 0, \; i=1, \ldots, N,$$

$$(2.32) \quad E(C_i)^2 = Q_i, \; i=1, \ldots, N,$$

(2.33) $E(C_i C_{i'}) = 0,\ i \neq i',\ i=1, \ldots N.$

(2.34) $E(C_{N+j}) = 0,\ j=1, \ldots M,$

(2.35) $E(C^2_{N+j}) = Q_{N+j},\ j=1, \ldots, M,$

(2.36) $E(C_{N+j} C_i) = 0,\ i=1, \ldots, N,\ j=1, \ldots, M.$

Um nun die Beziehungen zwischen den M einzelnen Wertpapierklassen darzustellen, verwendet man die Kovarianzmatrix der Klassenindizes:

(2.37) $\Sigma_M = (\sigma_{jj'}) = (\mathrm{Cov}\ I_j I_{j'}),\ j=1, \ldots, M,\ j'=1, \ldots, M.$

Analog den bisher gezeigten Modellen sind der erwartete Ertrag und die Varianz eines Portefeuilles durch folgende Formeln gegeben:

(2.38) $E = \sum_{i=1}^{N+M} X_i A_i = X'A,$ dabei ist:

$$X_{N+j} = \sum_{\{i \mid i \in N_j\}} X_i B_i,\ j=1, \ldots, M;$$

$$X' = (X_1, \ldots, X_{N+M}),\ A' = (A_1, \ldots, A_{N+M});$$

(2.39) $$V = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 Q_i + \sum_{j=1}^{M} \sum_{j'=1}^{M} X_{N+j} X_{N+j'} \sigma_{jj'} = X' \Sigma_{N+M} X,$$

dabei ist: $\Sigma_{N+M} = \begin{pmatrix} \Sigma_N & 0 \\ 0 & \Sigma_M \end{pmatrix}.$

Die Kovarianzmatrix (Σ_{N+M}), die häufig invertiert werden muß, um die effizienten Portefeuilles festzustellen, kann in vier Teilmatrizen aufgeteilt werden, von denen zwei nur Nullen als Elemente besitzen. Die erste Teilmatrix (Σ_N) ist eine Diagonalmatrix und stellt praktisch das einfache Indexmodell für jede der M Branchen dar.

Die zweite Teilmatrix (Σ_M) stellt die volle Kovarianzmatrix zwischen den Branchenindizes dar. Trotzdem wird gegenüber dem Modell von MARKOWITZ noch Rechenzeit eingespart, da die Zahl der Branchenindizes M gewöhnlich viel kleiner ist als die Zahl der Wertpapiere N. Daher wird die zusammengesetzte Kovarianzmatrix Σ_{N+M} durch Zerlegungstechniken invertiert; die einzige Matrix, die nach einer der allgemeineren Methoden invertiert werden muß, ist die erheblich kleinere Σ_M-Matrix.

2.4 Das Multi-Index-Modell der Diagonalform

Dieses Modell hat einen ähnlichen Aufbau wie das Modell der Kovarianzform. Das Multi-Index-Modell der Diagonalform verwendet eine Hierarchie von Indizes. Die Branchenindizes beziehen sich direkt auf die Wertpapiererträge nach Branchen, wie in der Kovarianzform. Ein zusätzlicher Index, wie z. B. der Index des Bruttosozialproduktes, wird als übergeordneter Index benützt, um die Beziehungen (Kovarianzen) zwischen den einzelnen Wertpapierklassen zu erfassen. Dieser übergeordnete Index ist praktisch ein weiteres Ersatzwertpapier, nämlich das (N+M+1)-ste; es dient zur Darstellung des Zusammenhangs der Branchenindizes mit sich selbst. Die zukünftigen Werte der Branchenindizes ergeben sich daher zu:

$$(2.40) \quad I_j = A_{N+j} + B_{N+j} I + C_{N+j}, \quad j=1, \ldots, M.$$

Es werden für das Modell der Diagonalform noch folgende Annahmen gemacht:

(2.41) $E(C_{N+j}) = 0,\ j=1, \ldots, M,$

(2.42) $E(C^2_{N+j}) = Q_{N+j},\ j=1, \ldots, M,$

(2.43) $E(C_{N+j}C_i) = 0,\ i=1, \ldots, N,$

(2.44) $E(C_{N+j}C_{N+j'}) = 0,\ j \neq j'.$

Die Höhe des übergeordneten Index J wird definiert als: $J = A_{N+M+1} + C_{N+M+1}$, wobei A_{N+M+1} der erwartete Indexstand von J ist und C_{N+M+1} eine Zufallsvariable mit dem Mittelwert 0 und der Varianz Q_{N+M+1}. Des weiteren wird angenommen, daß C_{N+M+1} mit keinem der Wertpapiere der Teilmenge 1. Ordnung, sowie mit keinem der Branchenindizes korreliert ist, d. h.:

(2.45) $E(C_{N+M+1}C_i) = 0,\ i=1, \ldots, N+M.$

Der erwartete Ertrag eines Portefeuilles und die Varianz dieses Portefeuilleertrages sind in dem Modell der Diagonalform durch nachstehende Formeln gegeben:

(2.46) $\text{Ertrag} = \sum_{i=1}^{N+M+1} X_i A_i = X'A,$ wobei $X_{N+j} = \sum_{\{i \mid i \varepsilon N_j\}} X_i B_i,$

$$X_{N+M+1} = \sum_{j=1}^{M} X_{N+j} B_{N+j},\quad X' = (X_1, \ldots, X_{N+M+1}),$$

$$A' = (A_1, \ldots, A_{N+M+1}) \text{ ist.}$$

$$(2.47)\quad V = \sum_{i=1}^{M} X_i^2 Q_i + \sum_{j=1}^{M} X_{N+j}^2 Q_{N+j} + X_{N+M+1}^2 Q_{N+M+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{N+M+1} X_i^2 Q_i = X' \Sigma_{M+N+1} X, \text{ wobei}$$

$$X' = (X_1, \ldots, X_N, X_{N+1}, \ldots, X_{N+M+1}) \text{ ist.}$$

Die Kovarianzmatrix Σ_{N+M+1} hat Diagonalform, wie bei dem Modell von SHARPE, jedoch ist es nicht die gleiche Kovarianzmatrix wie dort.

3. DIE EINGABEDATEN FÜR MODELLE DER PORTFOLIO SELECTION

3.1 Eine retrospektive Betrachtung der Erträge ausgewählter Aktien

Um einen ersten Überblick über die Erträge der in den späteren Untersuchungen verwendeten Aktien, d.h. der Teilmengen 1. Ordnung, zu gewinnen, wurden Erträge von vierzig an deutschen Börsen notierten Aktien errechnet. Aus Vergleichsgründen wurde dabei nur von solchen Aktien ausgegangen, die während des ganzen betrachteten Zeitraumes von Ende 1953 bis zum Jahresende 1967 börsennotiert waren. Die Aktie des Volkswagenwerkes z. B. ist aus diesem Grund nicht in den speziellen Anwendungen vertreten. Eine weitere Auswahl liegt darin, daß nur die vierzig am Jahresende 1953 der Höhe ihres Nominalkapitals nach größten Aktiengesellschaften genommen wurden, da nur bei ihnen regelmäßige Börsenumsätze getätigt werden. Die ausführlichen Namen dieser vierzig Aktiengesellschaften und die in den späteren Rechnungen und Tabellen verwendeten Kurzfassungen dieser Namen sind in Tabelle 1* im Anhang wiedergegeben.

Für die Berechnung der oben genannten Erträge wurden die Kurse der entsprechenden Aktien bereinigt.[1)] Durch die

---

1) Für die Bereinigung der Aktienkurse wurde das Verfahren von LINDEN angewandt. Vgl. dazu: H.J. LINDEN: Bereinigte Kurse ausgewählter Börsenwerte, Darmstadt 1962, S. 3-5. Die Kurse und Dividenden der einzelnen Aktiengesellschaften können den verschiedenen Jahrgängen des Wegweisers durch deutsche Aktiengesellschaften der Bayerischen Hypotheken- und Wechselbank entnommen werden, A. d. V.

Bereinigung der Aktienkurse werden Kapitalveränderungen - z.B. durch Kapitalerhöhung - bei der Ertragsfeststellung berücksichtigt. Die Aktienerträge sollen im folgenden als Faktoren ausgedrückt werden. Am Beispiel der Aktie FABAY soll die Berechnung derartiger Ertragsfaktoren für ein Kalenderjahr gezeigt werden. Der bereinigte Endkurs der Aktie FABAY betrug am Jahresende 1953 127,50 DM, die während des Jahres bis zum letzten Börsentag des Jahres 1954 gezahlte Dividende betrug 7,-- DM; der Börsenkurs am Jahresende 1954 war 257,-- DM. Der Ertragsfaktor errechnet sich wie folgt:

$$\frac{257 + 7}{127,5} = 2,071.$$

Kaufte ein Investor am letzten Börsentag des Jahres 1953 eine Aktie FABAY, so war diese Aktie ein Jahr später einschließlich Dividenden das 2,071-fache wert. Ausgegangen wurde in jedem Fall von dem bereinigten Börsenkurs, der am Beginn des betrachteten Jahres steht. Dargestellt werden die Ertragsfaktoren der oben genannten vierzig Aktien für die Kalenderjahre von 1954 bis 1967 in Tabelle 2*[1)].

Der größte innerhalb des Untersuchungszeitraums festgestellte Ertragsfaktor war 3,298 für Hoesch-Aktien für das Jahr 1954. Der kleinste festgestellte Ertragsfaktor war 0,594 für Aktien der Hüttenwerke Oberhausen für das Jahr 1966. Beide Gesellschaften sind in der gleichen Branche tätig. Vergleicht man die 14 Ertragsfaktoren z. B. dieser beiden zuletzt genannten Aktien in Tabelle 2*, so können wir festhalten, daß für bestimmte Branchenportefeuilles durch Modelle der Portfolio Selection eine effiziente Diversifikation erreicht werden kann.

---

1) Vgl. S. 5* bis S. 7*.

3.2 Die zeitliche Stabilität von Kovarianzen und Korrelationskoeffizienten bei Aktienerträgen

Mit Hilfe der Korrelationsrechnung wird das Maß des Zusammenhangs mehrerer statistischer Merkmalsreihen festgestellt. In dieser Arbeit sind die Merkmalsreihen Erträge von Aktien. Der Begriff Korrelation impliziert allerdings keinen ursächlichen Wirkungszusammenhang; das Bestehen eines Wirkungszusammenhanges kann bei Aktienerträgen aber durch eine Reihe von Indizien bestätigt werden.[1] Die Tabelle 3-1 zeigt die Korrelationskoeffizienten der 40 in Tabelle 1* dargestellten Aktien. Zu ihrer Berechnung wurden die in Tabelle 2* dargestellten Ertragsfaktoren herangezogen. Es wurden 9 Jahre betrachtet, und zwar der Zeitraum von 1954 bis 1963. Obwohl HIELSCHER[2] mit Monatsdurchschnitten für die Jahre 1954 - 1966 arbeitet, zeigt seine Korrelationskoeffiziententabelle für zwanzig Aktien eine gute Übereinstimmung mit Tabelle 3-1. Der Verfasser hat auch für andere Zeiträume und für andere Aktien Korrelationskoeffizientenmatrizen ausgerechnet. Dabei stellt sich heraus, daß es möglich ist, sie mit Hilfe von vergangenen Werten hinreichend zu schätzen. Sie verändern sich im Zeitablauf nur geringfügig. Lediglich bei der Betrachtung relativ langer Zeiträume treten häufiger negative Korrelationskoeffizienten auf. Entsprechendes gilt für die Kovarianzen, die beim MARKOWITZ-Modell zur Risikoberechnung herangezogen werden.

Insgesamt betrachtet, sind Aktienerträge in der Regel stärker positiv miteinander korreliert, als man zunächst vermu-

---

1) Auf diese Indizien kann im Rahmen dieser Arbeit nicht näher eingegangen werden.

2) Vgl. U. HIELSCHER: Loc. cit., S. 65.

Tabelle 3-1: Korrelationskoeffizienten von 40 ausgewählten Aktienerträgen während der Jahre vom 31. 12. 1954 bis zum 31. 12. 1963. Errechnet aus bereinigten Erträgen zum jeweiligen Kalenderjahresende.

Aktie[1] (Kurztitel)	Fabay 1	Basf 2	Hoest 3	Siems 4	Rwe 5	Ath 6	Manns 7	Hoesh 8	Daiml 9	Gbag 10
1 FABAY	1.00									
2 BASF	0.98	1.00								
3 HOEST	0.98	0.99	1.00							
4 SIEMS	0.88	0.85	0.84	1.00						
5 RWE	0.94	0.89	0.88	0.91	1.00					
6 ATH	0.56	0.49	0.47	0.48	0.72	1.00				
7 MANNS	0.76	0.69	0.67	0.69	0.86	0.95	1.00			
8 HOESH	0.70	0.64	0.59	0.65	0.85	0.91	0.94	1.00		
9 DAIML	0.93	0.92	0.92	0.83	0.92	0.57	0.74	0.76	1.00	
10 GBAG	0.62	0.52	0.50	0.38	0.64	0.59	0.65	0.74	0.65	1.00
11 RHSTL	0.84	0.83	0.78	0.85	0.86	0.67	0.84	0.78	0.82	0.52
12 AEG	0.76	0.76	0.71	0.91	0.78	0.47	0.67	0.60	0.63	0.24
13 DEA	0.76	0.69	0.66	0.75	0.88	0.91	0.97	0.91	0.68	0.59
14 KLOCW	0.77	0.71	0.70	0.66	0.89	0.92	0.94	0.97	0.83	0.73
15 HEW	0.69	0.71	0.68	0.54	0.55	0.09	0.29	0.30	0.50	0.46
16 DCHOE	0.67	0.59	0.59	0.65	0.83	0.97	0.97	0.92	0.68	0.56
17 KAUFH	0.91	0.90	0.91	0.87	0.92	0.60	0.76	0.74	0.98	0.56
18 CONGU	0.96	0.93	0.92	0.82	0.95	0.71	0.86	0.84	0.95	0.72
19 HOH	0.67	0.60	0.56	0.55	0.70	0.87	0.93	0.83	0.64	0.67
20 KARST	0.94	0.91	0.94	0.85	0.92	0.59	0.75	0.70	0.96	0.56
21 BEWAG	0.31	0.37	0.28	0.51	0.41	0.23	0.32	0.43	0.25	0.04
22 DEGUS	0.91	0.89	0.90	0.81	0.92	0.65	0.79	0.79	0.98	0.62
23 SCHER	0.06	-0.02	-0.04	-0.14	0.03	0.47	0.42	0.28	0.02	0.41
24 GLSTO	0.95	0.96	0.94	0.81	0.93	0.64	0.79	0.78	0.92	0.61
25 ILSHU	0.70	0.63	0.59	0.66	0.80	0.91	0.95	0.92	0.67	0.65
26 METGE	0.94	0.93	0.95	0.81	0.91	0.59	0.75	0.71	0.98	0.58
27 WINHA	0.63	0.59	0.50	0.56	0.70	0.74	0.81	0.85	0.55	0.72
28 KHD	0.85	0.84	0.85	0.70	0.81	0.38	0.54	0.62	0.94	0.68
29 FARBE	0.25	0.24	0.21	0.01	0.01	0.21	0.05	0.04	0.19	0.52
30 GHH	0.98	0.94	0.94	0.81	0.94	0.67	0.83	0.79	0.94	0.73
31 SALZD	0.59	0.55	0.47	0.50	0.57	0.65	0.77	0.72	0.57	0.68
32 BAYHY	0.94	0.90	0.88	0.91	0.97	0.68	0.85	0.85	0.95	0.68
33 ESCHB	0.79	0.76	0.69	0.75	0.81	0.71	0.86	0.85	0.73	0.68
34 FELTN	0.69	0.67	0.60	0.82	0.79	0.60	0.74	0.82	0.72	0.51
35 DEMAG	0.96	0.95	0.96	0.80	0.86	0.39	0.60	0.58	0.94	0.61
36 BBC	0.95	0.93	0.94	0.84	0.95	0.66	0.80	0.77	0.97	0.59
37 RHPRE	0.78	0.69	0.66	0.73	0.86	0.89	0.97	0.91	0.73	0.73
38 BMW	0.49	0.42	0.41	0.43	0.64	0.56	0.56	0.70	0.66	0.72
39 VDTME	0.87	0.86	0.90	0.86	0.84	0.45	0.63	0.57	0.92	0.39
40 BAYVE	0.89	0.88	0.85	0.97	0.93	0.62	0.81	0.77	0.85	0.45

1) Vgl. Tabelle 1*: Kurztitel der am Jahresende 1953 dem Nominalkapital nach größten deutschen Aktiengesellschaften Anhang, S. 2*ff.

Tabelle 3-1: Korrelationskoeffizienten von 40 ausgewählten Aktienerträgen während der Jahre vom 31. 12. 1954 bis zum 31. 12. 1963. Errechnet aus bereinigten Erträgen zum jeweiligen Kalenderjahresende (1. Fortsetzung).

Aktie[1] (Kurztitel)	Rhstl 11	AEG 12	DEA 13	Klocw 14	Hew 15	Dohoe 16	Kauth 17	Congu 18	Hoh 19	Karst 20
11 RHSTL	1.00									
12 AEG	0.80	1.00								
13 DEA	0.82	0.76	1.00							
14 KLOCW	0.76	0.55	0.90	1.00						
15 HEW	0.38	0.61	0.39	0.30	1.00					
16 DOHOE	0.75	0.59	0.94	0.94	0.14	1.00				
17 KAUFH	0.81	0.68	0.71	0.82	0.45	0.73	1.00			
18 CONGU	0.83	0.70	0.82	0.90	0.60	0.79	0.95	1.00		
19 HOH	0.83	0.54	0.85	0.81	0.21	0.86	0.65	0.76	1.00	
20 KARST	0.78	0.64	0.70	0.81	0.47	0.72	0.99	0.95	0.63	1.00
21 BEWAG	0.40	0.75	0.47	0.29	0.52	0.27	0.25	0.31	0.14	0.16
22 DEGUS	0.78	0.64	0.73	0.87	0.48	0.76	0.99	0.97	0.66	0.97
23 SCHER	0.30	-0.11	0.30	0.25	-0.23	0.35	-0.00	0.14	0.69	0.02
24 GLSTO	0.82	0.74	0.79	0.83	0.68	0.71	0.89	0.96	0.65	0.89
25 ILSHU	0.75	0.70	0.93	0.89	0.36	0.92	0.72	0.83	0.89	0.68
26 METGE	0.78	0.62	0.69	0.82	0.50	0.71	0.98	0.96	0.64	0.99
27 WINHA	0.74	0.68	0.85	0.74	0.55	0.70	0.51	0.70	0.79	0.46
28 KHD	0.60	0.46	0.49	0.71	0.58	0.49	0.90	0.88	0.42	0.89
29 FARBE	0.18	-0.04	-0.11	-0.08	0.44	-0.24	0.07	0.18	0.21	0.08
30 GHH	0.83	0.68	0.80	0.85	0.64	0.75	0.92	0.99	0.75	0.94
31 SALZD	0.76	0.56	0.69	0.64	0.33	0.64	0.57	0.68	0.91	0.52
32 BAYHY	0.88	0.80	0.84	0.87	0.57	0.79	0.95	0.97	0.74	0.93
33 ESCHB	0.83	0.82	0.86	0.78	0.60	0.75	0.74	0.86	0.84	0.69
34 FELTN	0.79	0.85	0.77	0.72	0.48	0.68	0.75	0.76	0.62	0.65
35 DEMAG	0.71	0.63	0.58	0.68	0.70	0.52	0.92	0.92	0.51	0.94
36 BBC	0.79	0.67	0.77	0.87	0.51	0.77	0.98	0.97	0.66	0.99
37 RHPRE	0.84	0.69	0.95	0.90	0.38	0.92	0.75	0.86	0.94	0.74
38 BMW	0.55	0.15	0.51	0.72	0.05	0.58	0.56	0.57	0.49	0.55
39 VDTME	0.73	0.64	0.59	0.69	0.40	0.62	0.97	0.86	0.51	0.97
40 BAYVE	0.89	0.94	0.85	0.77	0.58	0.75	0.88	0.88	0.66	0.85

1) Vgl. S. 63.

Tabelle 3-1: Korrelationskoeffizienten von 40 ausgewählten Aktienerträgen während der Jahre vom 31. 12. 1954 bis zum 31. 12. 1963. Errechnet aus bereinigten Erträgen zum jeweiligen Kalenderjahresende (2. Fortsetzung).

Aktie[1] (Kurztitel)	Bewag 21	Degus 22	Scher 23	Glsto 24	Ilshu 25	Metge 26	Winha 27	Khd 28	Harbe 29	Ghh 30
21 BEWAG	1.00									
22 DEGLS	0.28	1.00								
23 SCHER	-0.41	0.00	1.00							
24 GLSTC	0.45	0.92	0.00	1.00						
25 ILSHU	0.43	0.76	0.36	0.74	1.00					
26 METGE	0.18	0.98	0.03	0.92	0.69	1.00				
27 WINHA	0.60	0.56	0.36	0.70	0.85	0.49	1.00			
28 KHD	0.17	0.91	-0.15	0.84	0.52	0.91	0.41	1.00		
29 HARBE	-0.22	0.06	0.41	0.13	-0.03	0.13	0.24	0.27	1.00	
30 GHH	0.25	0.93	0.18	0.95	0.78	0.95	0.69	0.87	0.27	1.00
31 SALZD	0.26	0.58	0.63	0.57	0.82	0.54	0.81	0.41	0.45	0.67
32 BAYHY	0.43	0.95	0.07	0.92	0.84	0.92	0.72	0.85	0.13	0.95
33 ESCHB	0.56	0.76	0.28	0.80	0.92	0.71	0.91	0.60	0.25	0.83
34 FELTN	0.74	0.74	-0.05	0.73	0.81	0.65	0.79	0.60	-0.01	0.70
35 DEMAG	0.21	0.91	-0.06	0.90	0.57	0.95	0.47	0.94	0.33	0.94
36 BBC	0.25	0.98	0.01	0.94	0.74	0.99	0.55	0.89	0.04	0.96
37 RHPRE	0.31	0.76	0.45	0.76	0.95	0.73	0.85	0.56	0.11	0.85
38 BMW	-0.01	0.58	0.20	0.51	0.42	0.55	0.44	0.63	0.11	0.57
39 VDTME	0.16	0.93	-0.10	0.81	0.58	0.96	0.31	0.85	0.02	0.85
40 BAYVE	0.60	0.86	-0.05	0.88	0.80	0.84	0.71	0.70	-0.02	0.86

Aktie[1] (Kurztitel)	Salzd 31	Bayhy 32	Eschb 33	Feltn 34	Demag 35	BBC 36	Rhpre 37	BMW 38	Vdtme 39	Bayve 40
31 SALZD	1.00									
32 BAYHY	0.70	1.00								
33 ESCHB	0.89	0.89	1.00							
34 FELTN	0.70	0.86	0.89	1.00						
35 DEMAG	0.50	0.89	0.69	0.61	1.00					
36 BBC	0.53	0.94	0.73	0.69	0.93	1.00				
37 RHPRE	0.84	0.87	0.91	0.76	0.64	0.77	1.00			
38 BMW	0.33	0.59	0.37	0.43	0.47	0.58	0.56	1.00		
39 VDTME	0.43	0.87	0.60	0.63	0.90	0.94	0.62	0.44	1.00	
40 BAYVE	0.62	0.95	0.87	0.90	0.80	0.87	0.82	0.41	0.83	1.00

1) Vgl. S. 63.

ten würde. Dies gilt ganz besonders für die Erträge von Aktien einer Branche. HIELSCHER beschreibt diese Tatsache folgendermaßen:

"Die starke Korrelation der einzelnen Aktienkursverläufe weist darauf hin, daß bei den Aktienmarktteilnehmern die Auffassung herrscht, daß sich die einzelnen Gesellschaften im Hinblick auf die Ertragsentwicklung auf längere Sicht nicht der Allgemeinentwicklung entziehen können."[1)]

3.3 Finanzanalytische Gesichtspunkte zur Ertragsprognose

Wie bereits ausgeführt wurde, wird es als wichtige Aufgabe dieser Arbeit angesehen, zwei Modelle der Portfolio Selection mit Hilfe von vergangenen Daten zu testen. Um dies durchführen zu können, müssen - wenn auch retrospektiv - Ertrags- und Risikoprognosen durchgeführt werden. Eine solche Prognose der Erträge von Aktien ist aber auch dann, wenn die inzwischen eingetretene Entwicklung bekannt ist, objektiv kaum möglich, da auch hier subjektive Momente eine Rolle spielen. Noch größer sind allerdings die Schwierigkeiten für eine echte Zukunftsschätzung, wie es folgendes Zitat aus einem Börsenbericht ausdrückt:

"Selbst wenn eine Fülle sachverständig aufbereiteter Informationen dem Anleger zur Verfügung steht, ist - wie das amerikanische Beispiel zeigt - eine vollständige Objektivierung des Aktienmarktes nicht zu erreichen. Die Aufgabe des Analysten sehe ich in diesem Zusammenhang darin, im Interesse der Funktionsfähigkeit des Marktes alle verfügbaren Tatsachen zu sammeln und auszuwerten und damit zur Schaffung einer allgemeinen Vertrauensbasis beizutragen. Letzten Endes kann der Analyst dem Anleger seine Entscheidung nur erleichtern, nicht sie ihm abnehmen. Der Anleger muß vielmehr die ihm vorgetragenen Argumente abwägen, vergleichen und mit seinen eigenen Vorstellungen und Wünschen konfrontieren. Er muß schließlich auch über den Zeitpunkt

---

1) U. HIELSCHER: Loc. cit., S. 82.

der Anlage entscheiden."[1)]

In der praktischen Anlageberatung dominieren die Methoden der Kennziffernanalyse;[2)] entscheidend für die Beurteilung der Bedeutung einzelner Kennziffern ist dabei immer die individuelle Nutzenvorstellung und damit das Anlageziel eines Investors. So verschieden die Interessenlagen einzelner Investoren sind, so unterschiedlich werden in der Regel ihre Wertvorstellungen von ein und derselben Aktie sein:

"Eine grundsätzlich falsche oder allgemein richtige Aktienbewertung ist nicht vorstellbar, solange die Anlageziele von Investoren subjektiv und damit unterschiedlich sind. An der Aktienbörse bringt selbst die unsinnigste Meinung und eine objektiv falsche Bewertungsmethode dem, der sie verwendet, Gewinn ..., wenn sie bewirkt, daß genügend Investoren eine Aktie kaufen oder verkaufen."[3)]

Auch Kurstrendanalysen oder die detaillierten Bewertungsmethoden, wie sie von der Deutschen Vereinigung für Finanzanalyse und Anlageberatung vorgeschlagen werden,[4)] können nur Anhaltspunkte bieten und enthalten schließlich - wie jede Prognose - subjektive Elemente.

Bei den Ertragsschätzungen über Kurstrendanalysen werden Anlageentscheidungen vom Kursniveau oder von einer anderen als Aktienindex verwendeten Größe abhängig gemacht. Wie die nachfolgenden Ausführungen zeigen, ist der Ein-

---

1) Bankhaus GEORG HAUCK & Sohn: Börsenbericht - Effektenanalyse in Frage und Antwort -, Frankfurt am Main Oktober 1964, S. 3.

2) Vgl. A. WINZER: Wie Aktien-Analysten Aktien analysieren - Methoden der Aktienbewertung -, Diss. Saarbrükken 1968, S. 5.

3) A. WINZER: Loc. cit., S. 5.

4) Vgl. Beiträge zur Aktienanalyse. Darmstadt: Deutsche Vereinigung für Finanzanalyse und Anlageberatung (DVFA), Heft 5 1967.

fluß der Aktienindizes auf die Anlageentscheidung aber noch allgemeinerer Art:

"Selbst wenn wir die enthusiastischen Höhenflüge der Wertpapieranalyse außer acht lassen, ist die junge Geschichte bedeutender Indizes zweifellos ein Faktor, der bei jeder rationalen Investmentpolitik in Rechnung gestellt werden sollte. Im ganzen gesehen können die größeren Schwünge der Aktienmärkte ziemlich gut aus den Wertpapierindizes diagnostiziert werden. Wir glauben zwar nicht, daß die Wertpapieranalyse allein ein ausreichender Führer für die Investitionspolitik ist, aber das Unterrichtetsein vom Verlauf der bekannteren Indizes ist ein wirksamer Schutz dagegen, in einen fallenden Markt einzusteigen oder einen steigenden zu verlassen; und das sind unleugbare Empfehlungen. Indizes sind ihrer wahren Natur nach unvollkommen und sie versuchen, eine ziemlich komplizierte Menge von Bewegungen in eine einzige Durchschnittszahl zu pressen. Nichtsdestoweniger sind sie ganz zuverlässig, wenn man richtig mit ihnen umgeht ...". Die Aktienkursindizes "werden, so hoffen wir, die meisten der täglich auftretenden Fragen beantworten, die der Wirtschaftler, der Geschäftsmann und der Geldanleger an sie richten wird".[1)]

Aus Vergleichbarkeitsgründen und zur Abschwächung dieser subjektiven Momente wurden in den speziellen Anwendungen von Kalkülmodellen der Portfolio Selection in dieser Arbei die Prognosen auf der Basis von Vergangenheitswerten gemacht. Bei dem Modell von MARKOWITZ wurden zur Eingabe für die Aktienerträge und deren Kovarianzen die Mittelwerte und die Kovarianzen, die aus den Erträgen der letzten fünf Jahre vor der Schätzung errechnet wurden, verwendet. Für das Modell von SHARPE wurden, um zu einer Schätzung des einzugebenden Index zu gelangen, aus den Indexwerten der letzten fünf Jahre vor dem Schätzzeitpunkt eine Standardabweichung errechnet und je nach Einschätzung der Marktlage zum letzten Wert des Index hinzugezählt oder abgezogen.

---

1) Zitiert nach: J. BLEYMÜLLER: Theorie und Technik der Aktienkursindizes, Wiesbaden 1966, S. 25f.

4. DARSTELLUNG DER BENUTZTEN PROGRAMME ZU MODELLEN DER PORTFOLIO SELECTION

4.1 Ein selbstentwickeltes Programm zum Modell von MARKOWITZ auf einer IBM/360

Zur maschinellen Durchrechnung einer Anzahl von Beispielen wurden zwei Programme verwendet:

a) Ein vom Verfasser geschriebenes Programm für größere EDV-Anlagen des Systems IBM/360,[1)]
b) das IBM-1401-Portfolio Selection-Programm.

Diese zwei Programme, ihre Eingabeerfordernisse und die notwendige Maschinenausstattung sollen in den nächsten Abschnitten allgemein beschrieben werden. Ferner werden im Anhang fünf Beispiele der ökonomisch interessanten Programmausgaben abgedruckt. Für beide Modelle wurden als Teilmenge 1. Ordnung vierzig Aktien ausgewählt, deren Kurztitel, wie schon erwähnt, in Tabelle 1* dargestellt sind.

Das selbstentwickelte Programm wird nun im einzelnen behandelt. Es ist in Fortran-IV geschrieben und benutzt die "Overlay-Struktur" des IBM-Betriebssystems 360. Es kann maximal vierzig Wertpapiere in einem Zug verarbeiten und rechnet nacheinander sämtliche ihm vorgegebenen Probleme aus. Die dafür erforderliche Mindestmaschinenausstattung ist:

---

1) Sämtliche Beispiele von Anwendungen des Modells von MARKOWITZ wurden mit der in Tabelle 13* (vgl. S. 28 * bis S. 47*) veröffentlichten Version dieses Programms auf der IBM 360/50 des Rechenzentrums der Universität Münster gerechnet. Da das eigene Programm in mehreren Ausbaustufen vorliegt, kann es auch zur Durchrechnung des Modells von SHARPE herangezogen werden. Von den Anwendungen des Modells von MARKOWITZ werden aus Raumgründen nur drei Beispiele veröffentlicht, die als besonders typisch angesehen werden können.

(1) 128 K[1] 360-Kernspeicher,

(2) Ein Kartenleser,

(3) Ein Drucker mit 132 Druckpositionen,

(4) (wahlweise) eine Magnetbandeinheit zur Dateneingabe,

(5) Ein Fortran-IV-Compiler mit Basic- und USA-Fortran.

Neben den oben angegebenen Kapazitätsbeschränkungen können keine fakultativen Nebenbedingungen zugelassen werden, da zugunsten der Schnelligkeit der Rechnung - nach einer einmaligen Dateneingabe für jedes Problem - vom Programm keine externen Zwischenspeicher mehr benötigt werden. Das ist für die Praxis zwar ein entscheidender Nachteil, wie z. B. für Investmentfonds; er spielt aber für die Probleme dieser Arbeit, da fakultative Nebenbedingungen nicht verwendet werden, keine Rolle.

In einem ersten Overlay-Zweig[2] wird dem Benutzer ein gro-

---

1) Beim Ausdruck K handelt es sich um eine Maßeinheit für die Kernspeicherkapazität. Einer Kapazität von 8 K des 1401-Kernspeichers (Computer der zweiten Generation) entspricht bei Anlagen des Systems 360 (Computer der dritten Generation) die Kapazität von 32 K. Zu den Einzelheiten dieser technischen Frage vgl. u. a. S. DWORATSCHEK: Einführung in die Datenverarbeitung, Berlin 1969, insbesondere S. 249-253; D.C. EVANS: Schaltungslogik und Speicher digitaler Rechenanlagen, in: Information. Computer und künstliche Intelligenz, mit einem Vorwort von K. STEINBUCH, Frankfurt am Main 1967, S. 29-49, insbesondere S. 39-45.

2) Da mit dem eigenen Programm neben dem Modell von MARKOWITZ auch das Modell von SHARPE durchgerechnet werden kann, sollen zu dieser Programmversion, die bisher nicht veröffentlicht ist, einige Anmerkungen gemacht werden. Zur Durchrechnung des Modells von SHARPE können die Datenkarten des 1401-Programms verwendet werden. Der erste Overlay-Zweig dieser Version entspricht weitgehend dem Datentransformationsprogramm des 1401-Programms. Die anschließende Weiterverarbeitung der transformierten Daten entspricht, im Gegensatz zu dem 1401-Programm, genau dem Algorithmus von MARKOWITZ. Trotzdem unterscheiden sich die Ergebnisse nur geringfügig. Im übrigen gelten für diese Version die gleichen Einschränkungen wie für die Version zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ.

ßer Teil der sonst vor der Eingabe durchzuführenden Rechnungen abgenommen. In dem zweiten Overlay-Zweig werden die für den Algorithmus von MARKOWITZ benötigten Matrizen aufgebaut und das erste E,V-effiziente Portefeuille bestimmt. In einem dritten und letzten Overlay-Zweig wird dann der Iterationsprozeß der "Kritischen Linienmethode" bis zum Schluß durchgeführt. Der "Output" des zweiten und dritten Overlay-Zweiges dieses Programmes ist dem Leser schon von Kapitel 2 her bekannt; denn dort wurde das hypothetische Musterbeispiel von MARKOWITZ durchgerechnet. Der Benutzer kann weiter wählen, ob er nur eine ökonomisch interessante Ausgabe oder aber auch die mathematischen Zwischenschritte ausgegeben haben möchte. Läßt der Benutzer die mathematischen Zwischenschritte mit ausdrucken, so wird das Programm etwas langsamer in der Ausführung.

Die ökonomisch interessanten Ergebnisse der Programmausgabe enthalten neben den Überschriften sogenannte Portefeuillevektoren, d. h. Eckportefeuilles in der Reihenfolge, wie sie von der "Kritischen Linienmethode" nacheinander erzeugt werden. Links werden in jedem Portefeuillevektor die für jedes Wertpapier empfohlenen Investitionsanteile dargestellt. Unter jedem Portefeuillevektor werden die Gewinnerwartung des Portefeuilles und deren Standardabweichung angegeben. Darunter wird diese Gewinnerwartung eines Portefeuilles noch vermehrt und vermindert um eine, zwei und drei Standardabweichungen ausgedruckt. Weiter werden bei dem eigenen Programm nur sogenannte Eckportefeuilles ausgegeben, da sich weitere effiziente Portefeuilles durch lineare Kombination zwischen den Investitionsanteilen zweier aufeinanderfolgender Portefeuillevektoren ermitteln lassen. Wenn in einem Portefeuillevektor mehr als ein Wertpapier empfohlen wird, so kann man sich die Aufteilung auf die verschiedenen Aktien auch graphisch darstellen lassen, um einen optischen Überblick zu erhalten.

Die für die Durchrechnung des Modells von MARKOWITZ benö-

tigten erwarteten Renditen, deren Standardabweichungen sowie die Kovarianzen zwischen diesen einzelnen Wertpapierrenditen werden von dem Programm weitgehend selbständig errechnet. Als Eingabedaten werden dafür nur die echten Wertpapiererträge einer Reihe von vergangenen Zeiträumen benötigt. In den Anwendungen dieser Arbeit wurden dazu im allgemeinen die Jahreserträge der letzten fünf Jahre vor dem Zeitpunkt der Schätzung herangezogen. Ohne weiteres kann auch mit Monats- oder Tageswerten gerechnet werden. Das subjektive Element wird über einen sogenannten Korrekturfaktor eingegeben. Schätzt der Investor, daß die Aktie XYZ z. B. unter dem Durchschnitt der zur Schätzung herangezogenen Vergangenheitswerte liegen wird, so setzt er den Korrekturfaktor für dieses Wertpapier unter 1 fest. Entsprechendes gilt für ein besseres Abschneiden. In den Anwendungen des Modells von MARKOWITZ wurde aus Vergleichbarkeitsgründen stets von einem Korrekturfaktor von 1 ausgegangen. Das Programm berücksichtigt selbständig den Korrekturfaktor auch zur Schätzung des Risikos. Der Planungshorizont beträgt dabei ein Jahr. Ein Verträglichkeitsmaß für die Schätzung wird nicht berücksichtigt.

Auf den ersten Seiten der im Anhang dargestellten Anwendungsbeispiele[1] des MARKOWITZmodells werden unter der Problemüberschrift die Wertpapiernamen, die erwarteten Renditen und die angewendeten subjektiven Korrekturfaktoren dargestellt. Die weiteren Ergebnisse der Programmausgabe des eigenen Programms bei Anwendung des Modells von MARKOWITZ sind die schon früher beschriebenen Portefeuillevektoren und bedürfen keiner Erläuterung mehr.

---

1) Vgl. zur Durchrechnung konkreter Anwendungen die Tabellen 3 * bis 8 *. Dargestellt werden die Anwendungen des Modells von MARKOWITZ auf den Seiten 8 * bis 15* im Anhang.

4.2 Ein Programm zum Modell von SHARPE auf einer IBM/1401

Dieses Programm kann nur das Modell von SHARPE verarbeiten.[1] Da es als einziges, bekanntgewordenes Programm für Anlagen der IBM 1401- oder 1460-Serie geschrieben wurde, wird es mitunter sowohl in der Literatur als auch in dieser Arbeit als 1401-Programm angesprochen.

Das 1401-Programm ist in der maschinennahen Sprache Autocoder geschrieben und benutzt die "Festpunktrechnung". Es kann bis zu 750 Wertpapiere in einem Lauf verarbeiten. Die dafür erforderliche Maschinenausstattung ist:

(1) 8 K 1401-Kernspeicher (entspricht etwa 32 K System 360),
(2) 1402-Kartenlesestanzer,
(3) 1403-Drucker mit 100 Druckpositionen,
(4) 4 Magnetbandeinheiten,
(5) Zusätzliche Programmunterstützungen,
(6) Programm-Umschalter.

Das IBM-1401-Portfolio Selection Programm verarbeitet eine gegebene Liste einzelner Wertpapiere, um aus ihnen effiziente Kombinationen von Wertpapieren auszuwählen. Es besteht aus den folgenden Programmteilen:

1) Ein "Datentransformationsprogramm" errechnet für jedes Wertpapier den erwarteten Ertrag, das Risiko dieses Ertrages, die Steigung und den Achsenabschnitt der linearen Funktion. Dieses Datentransformationsprogramm kann, falls für die Regression ein anderer Ansatz als die Methode der kleinsten Quadratsumme gewünscht wird, umgeschrie-

---

1) Die Anwendungen des Modells von SHARPE wurden sämtlich mit dem Portfolio Selection Programm IBM-1401-FI-04X im Testrechenzentrum der IBM in Sindelfingen gerechnet. Vgl. dazu: IBM Programm Reference Manual: Loc. cit., S. 1-114.

ben und in das übrige Programm integriert werden.

2) Die anschließenden Programmteile übernehmen die Weiterbehandlung des Problems und ermitteln effiziente Portefeuilles.

Um die Wirkungsweise des IBM-1401-Portfolio Selection Programms zu verdeutlichen, wird in Abbildung 4-1 ein allgemeiner Programmablaufplan dargestellt.

Nach dieser allgemeinen Beschreibung des IBM-1401-Portfolio Selection Programms wird die Programmausgabe allgemein erläutert.[1] Der "Output" des Datentransformationsprogrammes und des Programmes zur Berechnung zusätzlicher Wertpapierparameter (vgl. Abbildung 4-1) besteht aus folgenden Wertpapierparametern:

1. Die erwartete Rendite in Prozent, d. h. das Verhältnis des Wertpapierwertes am Ende des speziell betrachteten Zeitraumes zu seinem augenblicklichen Wert;

2. die Standardabweichung dieser Rendite:

   a) Einzel ($\sqrt{Q}$): Risiko, das das Wertpapier selbst betrifft und unabhängig vom Index ist.

   b) Gesamt ($\sqrt{V(r)}$): Risiko der Rendite, das sowohl das Einzelrisiko des Wertpapiers, als auch die Streuung des Index berücksichtigt;

3. die Relation zum Index:

   a) Steigung: Normalisierte Steigung der linearen Funktion der Rendite.

   b) Achsenabschnitt: Ordinatenabschnitt der linearen Funktion;

4. die fakultative Nebenbedingung: Der maximale Anteil in Prozent der gesamten Kapitalsumme, der in einem Wertpapier angelegt werden darf;

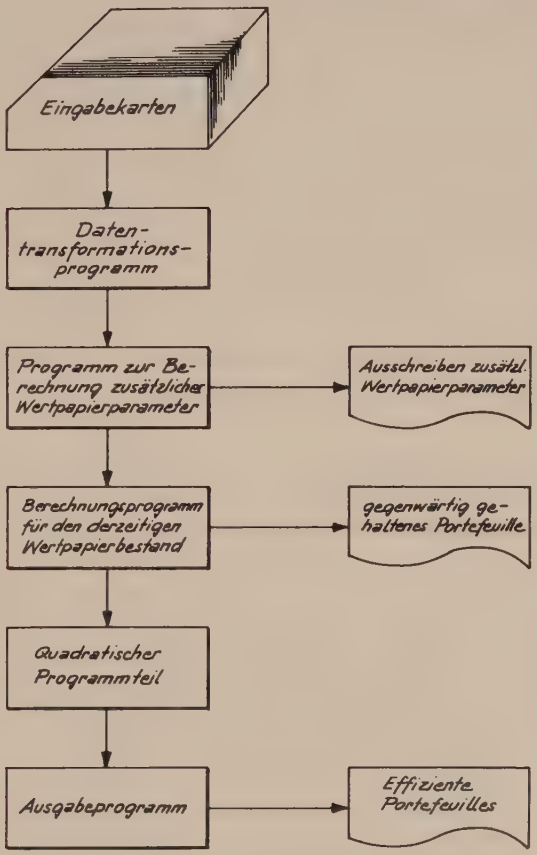
---

1) Vgl. zur Durchrechnung konkreter Anwendungen die Tabellen 9* bis 12*. Vgl. hierzu auch: IBM: Optimale Wertpapiermischungen, Programmbeschreibung, o. V., Oktober 1966, S. 34-38. (IBM Form 80632-0).

5. der augenblicklich gehaltene Bestand eines Wertpapiers in Prozent des gesamten Portefeuilles;

6. der Tageskurs des Wertpapiers zum Schätzungszeitpunkt.

Abbildung 4-1: Allgemeiner Programmablaufplan des IBM-1401-Portfolio Selection-Programms.



Diese Parameter werden in dem quadratischen Programmteil anschließend weiterverarbeitet.

Der quadratische Programmteil des 1401-Programmes berechnet effiziente Wertpapiermischungen und folgende Parameter der empfohlenen, effizienten Portefeuilles:

1. Die erwartete Rendite des Portefeuilles, dessen Zusammensetzung in dem Programmoutput weiter unten angegeben ist. Weitere Renditen von effizienten Aktienmischungen werden in den konkreten Beispielen in Schrittweiten von 1% zwischen der maximalen und der minimalen Rendite und an den kritischen Punkten (Schnittpunkt zweier kritischer Linien) berechnet. Die Sterne kennzeichnen die kritischen Punkte, d. h. die Eckportefeuilles ("Corner-Portfolios"), aus denen alle anderen Wertpapiermischungen ermittelt werden. In einigen Fällen liegen die kritischen Punkte so dicht beieinander, daß bei der angewendeten Rechengenauigkeit kein Unterschied festzustellen ist. In solchen Fällen sind die benachbarten Wertpapiermischungen identisch.

2. Die Standardabweichung der empfohlenen Portefeuilles; sie ist die Quadratwurzel der Varianz, d. h. des Risikos der empfohlenen Wertpapiermischung.

3. Die minimal und maximal erwarteten Renditen in Abhängigkeit von dem Verträglichkeitsmaß, mit dem die Einzelwerte geschätzt wurden, und zwar für den Bereich erwarteter Rendite $\pm$ 1 Standardabweichung und für die Bereiche von erwarteter Rendite $\pm$ 2 Standardabweichungen und 3 Standardabweichungen.

4. Die Zusammensetzung dieser Portefeuilles, d. h. wieviel Prozent der angelegten Kapitalsumme in den einzelnen Wertpapieren sein sollte.

Auch hier beträgt der Planungshorizont jeweils ein Jahr. In den Anwendungen des Modells von SHARPE wurde der Aktienindex[1] des Statistischen Bundesamtes in Wiesbaden zur Schätzung verwendet. Der Faktor für das Verträglichkeitsmaß beträgt jeweils 1; d. h. es wurde erwartet, daß der Streubereich des Index, also die Differenz zwischen dem hohen und dem niedrigen Wert des Index, den Bereich mittlerer Wert des Index $\pm$ Standardabweichung umfassen soll.

---

1) In dem Aktienindex des Statistischen Bundesamtes auf der Basis vom 31. 12. 1953 waren 1953 über 90% des Grundkapitals aller börsennotierten Aktiengesellschaften vertreten; bis 1961 war die Repräsentationsquote des börsennotierten Kapitals auf etwa 52% gesunken. Bis 1966 dürfte diese Repräsentationsquote noch weiter gefallen sein. So sah sich das Statistische Bundesamt schließlich genötigt, den alten Index der Aktienkurse auf die völlig neue Basis vom 31. 12. 1965 umzustellen. Dabei wurde die Gewichtung der einzelnen Industriegruppen erheblich verändert, so daß eine Umrechnung der alten Indexreihe auf die neue Basis die Vergleichbarkeit nur sehr beschränkt verbessert. Trotzdem wurden für die neueren Schätzungen der Anwendungen dieser Arbeit die beiden Indexreihen miteinander verknüpft. Vgl. zu diesem Punkt auch: U. HIELSCHER: Loc. cit., S. 388 u. 389.

5. BETRACHTUNG DER NUMERISCHEN ERGEBNISSE DER MODELLE

5.1 Darstellung der Ergebnisse des Modells von MARKOWITZ

In der ersten praktischen Anwendung[1] des Modells von MARKOWITZ wurde eine Schätzung vom Jahresende 1963 zum Jahresende 1964 durchgeführt; es wurde also retrospektiv eine Prognose für den Zeitraum von einem Jahr gemacht und aus den einzelnen Wertpapierparametern durch Anwendung des eigenen Programms effiziente Wertpapierportefeuilles berechnet. Zur Schätzung der einzelnen Wertpapierparameter wurden in diesem ersten Beispiel entgegen den allgemeinen Ausführungen in Kapitel 4 die jeweiligen Jahreserträge der neun vor dem Planungszeitpunkt gelegenen Jahre herangezogen. Als Schätzwert für die Rendite jedes einzelnen Wertpapiers wurde also aus den Jahreserträgen vom Jahresende 1954 bis zum Jahresende 1963 das arithmetische Mittel errechnet. Entsprechend wurden aus den neun Jahreserträgen und aus den Mittelwerten die Kovarianzen zwischen den Renditen berechnet. Da der Korrekturfaktor, wie bereits erwähnt, immer gleich 1 sein soll, sind diese Mittelwerte und Kovarianzen auch nicht korrigiert, um dadurch das subjektive Moment bei der Schätzung zu berücksichtigen.

Als Ergebnisse der Kalkulation wurden erwartete Wertpapierrenditen errechnet, die von der maximalen Rendite von 58,98% für die Aktie DAIML bis zur minimalen Rendite von -1,42% für die Aktie HARBE reichen.

---

1) Sie ist vollständig in den Tabellen 3* und 4* auf S. 8 * bis S. 10* wiedergegeben. In Kapitel 3 wurde die Korrelationskoeffizientenmatrix als Tabelle 3-1 zu dieser Anwendung angegeben, vgl. S. 63ff.

Eine der verschiedenen Auswertungsmöglichkeiten besteht im Vergleich der prozentualen Steigerung der jeweils zu erwartenden Rendite des empfohlenen Portefeuilles und der prozentualen Steigerung des zugehörigen Risikos, wobei die Steigerung sich jeweils auf das Minimum der Rendite bzw. des Risikos bezieht. Für die Berechnung der prozentualen Steigerung bezüglich der minimalen Rendite bzw. des minimalen Risikos gelten folgende Formeln:[1)]

$$(5.1) \quad PE_i = \frac{E_i - E_{min}}{E_{max} - E_{min}} \cdot 100 \quad (i=1, \ldots, \text{Anzahl der Eckportefeuilles})$$

$$(5.2) \quad PV_i = \frac{V_i - V_{min}}{V_{max} - V_{min}} \cdot 100 \quad (i=1, \ldots, \text{Anzahl der Eckportefeuilles})$$

PE_i ist die jeweilige prozentuale Steigerung der zu erwartenden Rendite (E_i) und PV_i die jeweilige prozentuale Steigerung des zugehörigen Risikos (V_i), wobei von Eckportefeuille zu Eckportefeuille gesprungen wird. Aus den Werten der Tabelle 4* ergeben sich so die ersten zwei Zeilen der Tabelle 5-1.

Durch Vergleich der PE_i mit den PV_i ergibt sich, daß zunächst durch kleine Steigerungen des Risikos eine erhebliche Steigerung der erwarteten Rendite erzielt werden kann. Bei einer Steigerung des Risikos um 49,96% erreicht man schon eine Steigerung der erwarteten Rendite um 65,14%.

Bezieht man die Steigerung der Rendite bzw. des Risikos nicht einheitlich auf das zugehörige Minimum, sondern jeweils auf die Rendite bzw. das Risiko desjenigen Portefeuilles, das sich in der nach steigenden Renditen bzw. Risiken geordneten Rangskala[2)] unmittelbar vor dem be-

---

1) Vgl. IBM: Optimale Wertpapiermischungen, loc. cit., S. 42. Das Risiko wird bei den Modellergebnissen stets als Standardabweichung und nicht als Varianz eines Portefeuilleertrages gemessen.

2) In Tabelle 5-1 können die Nummern der Eckportefeuilles (1, 2, ..., 14, 15) als Rangplätze interpretiert werden.

Tabelle 5-1: Erwartete Renditen, zugehörige Risiken (gemessen an der Standardabweichung) und deren prozentuale auf das jeweilige Minimum bezogene Steigerungen von Eckportefeuille zu Eckportefeuille (Modell MARKOWITZ 1963).

ckporte-euille Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	%														
endite (E_i)	10,86	13,88	15,72	15,75	15,83	16,78	19,00	19,35	19,66	20,15	23,81	28,15	29,73	42,21	58,98
isiko (V_i)	11,92	12,31	12,81	12,82	12,84	13,13	13,91	14,05	14,20	14,52	18,09	23,23	25,20	44,47	77,06
E_i	0,0	6,27	10,09	10,16	10,32	12,30	16,91	17,64	18,28	19,30	26,91	35,93	39,21	65,14	100,00
V_i	0,0	0,59	1,36	1,38	1,41	1,85	3,05	3,26	3,50	3,99	9,47	17,36	20,38	49,96	100,00
$E_{i+1} - PE_i$		6,27	3,82	0,07	0,16	1,98	4,61	0,73	0,64	1,02	7,61	9,02	3,28	25,93	34,86
$V_{i+1} - PV_i$		0,59	0,77	0,02	0,03	0,44	1,20	0,21	0,24	0,49	5,48	7,89	3,02	29,58	50,04

trachteten Portefeuille befindet, so zeigt sich folgendes:

Zunächst ist von kritischem Punkt zu kritischem Punkt das Verhältnis der prozentualen Steigerung der erwarteten Rendite ($PE_{i+1} - PE_i$) zu der Steigerung des Risikos ($PV_{i+1} - PV_i$) jeweils größer als 1; d. h. die Renditenzunahme ist größer als die Risikozunahme. Dies ist in Tabelle 5-1 bis zu der erwarteten Rendite von $E_i = 29,73\%$ mit einem Risiko von $V_i = 25,20\%$ der Fall.

In der zweiten praktischen Anwendung[1)] des Modells von MARKOWITZ sollte eine Schätzung am Jahresende 1962 zum Jahresende 1963 durchgeführt werden. Zu dieser Anwendung wurden die Wertpapierparameter entsprechend den Ausführungen des 4. Kapitels aus den Jahreserträgen der fünf vor dem Schätzungszeitpunkt liegenden Jahre gebildet; es wurden zur Schätzung also die Jahreserträge vom Jahresende 1958 bis zum Jahresende 1962 herangezogen.

Als Ergebnisse der Kalkulation wurden erwartete Wertpapierrenditen errechnet, die von der maximalen Rendite von 83,04% für die Aktie DAIML bis zur minimalen Rendite von -7,30% für die Aktie HARBE reichen. In Tabelle 5-2 ist wieder der Vergleich der auf das Minimum bezogenen prozentualen Steigerung der zu erwartenden Rendite der empfohlenen Eckportefeuilles und der ebenfalls auf das Minimum bezogenen prozentualen Steigerung des zugehörigen Risikos dargestellt.

Auch hier ergibt sich, daß durch kleine Risikosteigerungen große Steigerungen der erwarteten Portefeuillerendite erzielt werden können. Bei einer Steigerung des Risikos um 22,84% steigt die erwartete Rendite bereits um 40,67%.

---

1) Sie ist vollständig in den Tabelle 5* und 6* auf S. 11* bis S. 13 * wiedergegeben.

Tabelle 5-2: Erwartete Renditen, zugehörige Risiken (gemessen an der Standardabweichung) und deren prozentuale auf das jeweilige Minimum bezogene Steigerungen von Eckportefeuille zu Eckportefeuille (Modell MARKOWITZ 1962).

Eckportefeuille Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	%												
Rendite (E_i)	2,11	3,25	7,45	14,70	20,70	21,00	24,35	33,66*	33,66	35,03	48,41	72,63	83,04
Risiko (V_i)	9,83	9,94	10,87	14,00	17,53	17,72	20,00	27,97	27,98	29,56	46,73	80,81	96,21
PE_i	0,0	1,40	6,59	15,55	22,97	23,34	27,48	38,98	38,98	40,67	57,20	87,13	100,00
PV_i	0,0	0,12	1,20	4,82	8,91	9,13	11,77	21,00	21,01	22,84	42,71	82,17	100,00
$PE_{i+1} - PE_i$	1,40	5,19	8,96	7,42	0,37	4,14	11,50	0,00	1,69	16,53	29,93	12,87	
$PV_{i+1} - PV_i$	0,12	1,08	3,62	4,09	0,22	2,64	9,23	0,01	1,83	19,87	39,46	17,83	

* gerundeter Wert, die erwartete Rendite von Eckportefeuille Nr. 8 beträgt 33,655.

Diese zweite Anwendung des Modells von MARKOWITZ ist vom Zeitraum her direkt mit der in den Tabelle 9* und 10* gezeigten Anwendung des Modells von SHARPE vergleichbar.

In der dritten praktischen Anwendung[1] des Modells von MARKOWITZ wurde eine Schätzung vom Jahresende 1965 zum Jahresende 1966 durchgeführt. Als Ergebnisse der Kalkulation wurden erwartete Wertpapierrenditen errechnet, die von der maximalen Rendite von 10,46% für die Aktie BEWAG bis zu der minimalen Rendite von -16,70% für die Aktie VDTME reichen. In Tabelle 5-3 ist für dieses Beispiel wiederum der Vergleich der auf das Minimum bezogenen prozentualen Steigerung der erwarteten Rendite der empfohlenen Eckportefeuilles und der ebenfalls auf das Minimum bezogenen prozentualen Steigerung des zugehörigen Risikos dargestellt.

Wieder ergibt sich, daß durch kleine Risikosteigerungen große Steigerungen der erwarteten Portefeuillerendite erzielt werden, und zwar steigt bei einer Steigerung des Risikos um 39,26% die Rendite bereits um 64,04%.

Die dritte Anwendung des Modells von MARKOWITZ ist vom Zeitraum her direkt mit der in den Tabellen 11* und 12* gezeigten Anwendung des Modells von SHARPE vergleichbar.

5.2 Darstellung der Ergebnisse des Modells von SHARPE

In der ersten praktischen Anwendung[2] des Modells von SHARPE wurde eine Schätzung am Jahresende 1962 zum Jah-

---

1) Sie ist vollständig in den Tabellen 7* und 8* auf S. 14* bis S. 15* wiedergegeben.

2) Sie ist vollständig in den Tabellen 9* und 10* auf S. 16* bis S. 19* wiedergegeben.

Tabelle 5-3: Erwartete Renditen, zugehörige Risiken (gemessen an der Standardabweichung) und deren prozentuale auf das jeweilige Minimum bezogene Steigerungen von Eckportefeuille zu Eckportefeuille (Modell MARKOWITZ 1965).

Eckporte-feuille Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	%									
Rendite (E_i)	4,87	4,96	5,17	7,15	8,45	9,14	10,32	10,33	10,46*	10,46
Risiko (V_i)	5,88	5,91	5,97	7,24	9,21	10,76	13,79	13,84	14,24	14,36
PE_i	0,0	1,61	5,36	40,78	64,04	76,38	97,49	97,67	100,00	100,00
PV_i	0,0	0,35	1,06	16,03	39,26	57,54	93,27	93,86	98,58	100,00
$PE_{i+1} - PE_i$	1,61	3,75	35,42	23,26	12,34	21,11	0,18	2,33	0,00	
$PV_{i+1} - PV_i$	0,35	0,71	14,97	23,23	18,28	35,73	0,59	4,72	1,42	

* gerundeter Wert, die erwartete Rendite von Eckportefeuille Nr. 9 beträgt 10,455%.

resende 1963 durchgeführt. Der Stand des zur Schätzung herangezogenen Aktienindex des Statistischen Bundesamtes betrug Ende 1962 492 Punkte; es wurde geschätzt, daß er am Jahresende 1963 500 $\pm$ 160 Punkte betragen würde. Der tatsächliche Indexstand Ende 1963 betrug jedoch 545, d. h. die Prognose des Indexstandes und damit auch der einzelnen Wertpapierparameter lag erheblich zu niedrig. Der Faktor für das Verträglichkeitsmaß der Schätzung betrug 1.

Als Ergebnisse der Kalkulation wurden erwartete Wertpapierrenditen errechnet, die von der maximalen Rendite von 17,87% für die Aktie GLSTO bis zu der minimalen Rendite von -15,77% für die Aktie VDTME reichen. Als Auswertung soll wieder ein Vergleich der auf das Minimum bezogenen prozentualen Steigerung der zu erwartenden Rendite der empfohlenen Eckportefeuilles und der ebenfalls auf das Minimum bezogenen prozentualen Steigerung des zugehörigen Risikos durchgeführt werden. Aus den Werten dieser Anwendung ergeben sich die ersten zwei Zeilen für die Rendite (E_i) und das Risiko (V_i) der Tabelle 5-4.

Durch Vergleich der PE_i mit den PV_i ergibt sich auch hier, daß zunächst durch kleine Steigerungen des Risikos eine erhebliche Steigerung der erwarteten Rendite erzielt werden kann. Bei einer Steigerung des Risikos um 42,87% erreicht man eine Steigerung der erwarteten Rendite um 81,73%.

In der zweiten praktischen Anwendung[1)] des Modells von SHARPE wurde eine Schätzung am Jahresende 1965 zum Jahresende 1966 durchgeführt; es sollen wieder - wenn auch retrospektiv - effiziente Wertpapierportefeuilles bestimmt werden. Zur Schätzung wurde der Aktienindex des Statistischen Bundesamtes herangezogen; sein Stand betrug Ende 1965 474 Punkte; es wurde geschätzt, daß er

---

1) Sie ist vollständig in den Tabellen 11* und 12* auf S. 20* bis S. 27* wiedergegeben.

Tabelle 5-4: Erwartete Renditen, zugehörige Risiken (gemessen an der Standardabweichung) und deren prozentuale Steigerungen bezüglich ihrer Minimalwerte von Eckportefeuille zu Eckportefeuille (Modell SHARPE 1962).

Eckportefeuille Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	%									
Rendite (E_i)	-1,39	0,73	1,08	2,73	3,16	13,05	14,32	15,33	17,57	17,83
Risiko (V_i)	3,63	3,69	3,71	3,94	4,03	11,70	12,99	14,71	20,13	25,46
PE_i	0,0	11,03	12,85	21,43	23,67	75,13	81,73	86,99	98,64	100,0
PV_i	0,0	0,27	0,36	1,42	1,83	36,96	42,87	50,75	75,58	100,0
$PE_{i+1} - PE_i$	11,03	1,82	8,58	2,24	51,46	15,33	5,26	11,65	1,36	
$PV_{i+1} - PV_i$	0,27	0,09	1,06	0,41	35,13	5,91	7,88	24,83	24,42	

am Jahresende 1966 einen Stand von 494 - mit einer Abweichung von ± 68 - erreicht haben würde. Der tatsächliche Indexstand Ende 1966 betrug jedoch 398, d. h. die Prognose des Indexstandes und damit auch der einzelnen Wertpapierparameter lag erheblich zu hoch.

Als Ergebnisse der Kalkulation wurden erwartete Wertpapierrenditen errechnet, die von der Maximalen Rendite von 60,8% für die Aktie KHD bis zur minimalen Rendite von 12,8% für die Aktie ILSHU reichen. Die Steigung der Regressionsgeraden zeigt an, wie stark die Rendite mit dem Index kovariiert. So deutet der steile Anstieg bei der Aktie KHD - die Steigung beträgt 3,555, der Achsenabschnitt beträgt -2,946 - darauf hin, daß Kurswert und Dividenden der Aktie KHD sehr empfindlich gegenüber Faktoren sind, die das allgemeine Kurs- und Ertragsniveau beeinflussen. Umgekehrt läßt der viel geringere Anstieg bei der Aktie ILSHU darauf schließen - die Steigung beträgt 1,424, der Achsenabschnitt beträgt -1,553 - daß die Rendite sich wesentlich geringfügiger ändert, wenn die Einflußfaktoren sich verändern. Das wird auch durch die Standardabweichungen dieser Aktien bestätigt. Die Einzelstandardabweichung, die unabhängig vom Index ist, beträgt bei der Aktie KHD 17,33, bei der Aktie ILSHU 13,07. Die Gesamtstandardabweichung, die neben der Einzelstandardabweichung, welche nur die jeweilige Aktie selbst betrifft, auch die Schwankungen des Index berücksichtigt, beträgt bei der Aktie KHD 51,91, bei der Aktie ILSHU 23,56. Daraus wird ersichtlich, daß mit dem Modell von SHARPE die spätere Entwicklung und folglich die Empfehlung effizienter Portefeuilles günstigenfalls so genau ermittelt werden kann, wie der zur Schätzung verwendete Aktienindex auf Schwankungen der allgemeinen Einflußfaktoren reagiert.

Als Auswertung soll zunächst wieder ein Vergleich der auf das Minimum bezogenen prozentualen Steigerung der zu erwartenden Rendite der empfohlenen Eckportefeuilles

und der ebenfalls auf das Minimum bezogenen prozentualen Steigerung des zugehörigen Risikos durchgeführt werden. Aus den Werten dieser Anwendung ergibt sich Tabelle 5-5.

Beim Vergleich der PE_i mit den PV_i bemerkt man wiederum, daß durch zunächst kleine Steigerungen des Risikos eine erhebliche Steigerung der erwarteten Rendite erzielt werden kann. Bei einer Steigerung des Risikos von 28,8% erreicht man eine Steigerung der erwarteten Rendite um 57,4%.

Eine andere Möglichkeit zur Auswertung ist die graphische Darstellung[1)] der erwarteten Renditen der Eckportefeuilles $\pm$ einer Standardabweichung dieser Rendite bei den einzelnen durch ihre jeweilige Rendite gemessenen Portefeuilles. Bei Portefeuille Nr. 1 der Tabelle 5-5 ergibt sich als Wert der Rendite minus einer Standardabweichung gleich -0,91%; der entsprechende Wert für Portefeuille Nr. 2 der Tabelle 5-5 beträgt +1,70%. Da wir uns zwischen zwei benachbarten Eckportefeuilles auf linearen Funktionen bewegen, ist eine lineare Kombination zwischen den Parametern zweier benachbarter Eckportefeuilles erlaubt; alle so ermittelten Parameter gehören ebenfalls zu effizienten Portefeuilles. Kombiniert man die Werte zwischen -0,91% für Eckportefeuille Nr. 1 und +1,70% für Eckportefeuille Nr. 2, so ergibt sich, daß bei einer erwarteten Rendite von 6,5% mit einer statistischen Sicherheit von 68,27% kein Verlust mehr erzielt wird. Der Faktor für das Verträglichkeitsmaß der Schätzung, der auch als Risikofaktor bezeichnet werden kann und Aussagen über die Sicherheit der Indexschätzung macht, ist bereits in der Standardabweichung bzw. im Risiko jedes einzelnen Portefeuilles berücksichtigt worden. Dieser

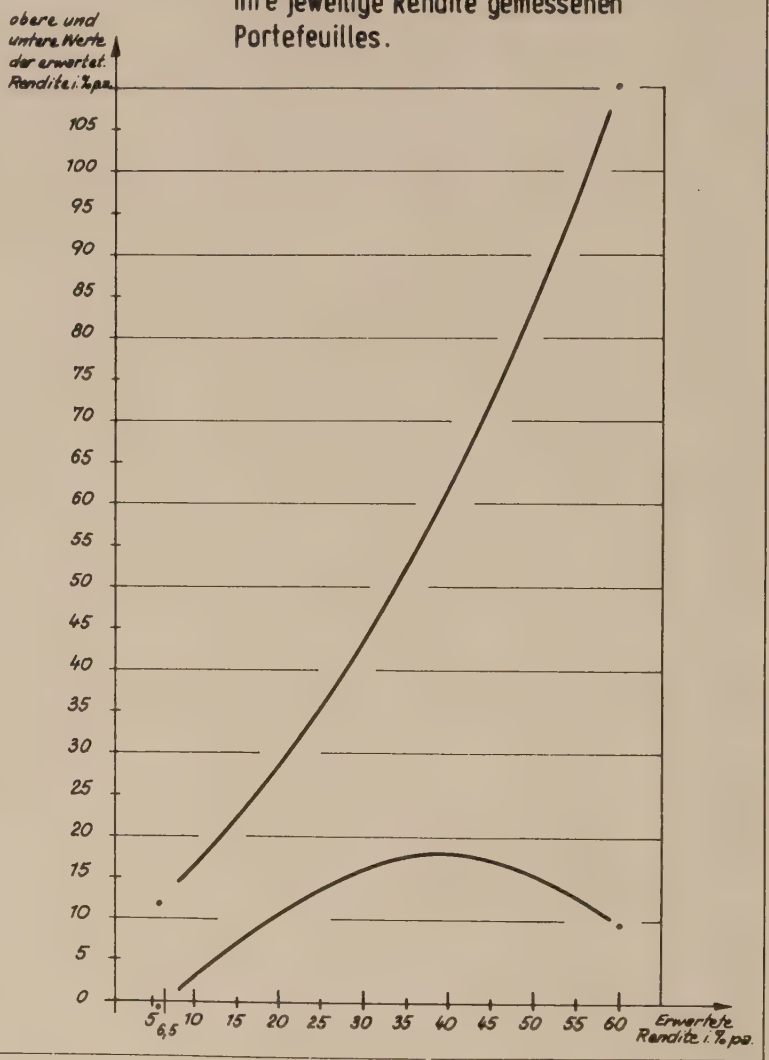
---

1) Vgl. Abbildung 5-1 S. 90.

Tabelle 5-5: Erwartete Renditen, zugehörige Risiken (gemessen an der Standardabweichung) und deren prozentuale auf das jeweilige Minimum bezogene Steigerungen von Eckportefeuille zu Eckportefeuille (Modell SHARPE 1965).

Eckportefeuille Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	%												
Rendite (E_i)	5,49	8,29	8,54	13,36	21,29	21,77	22,01	29,22	37,24	41,12	42,47	57,73	60,84
Risiko (V_i)	6,40	6,59	6,63	7,61	10,16	10,34	10,43	13,39	19,50	23,42	24,82	46,60	51,91
PE_i	0,0	5,06	5,51	14,2	28,5	29,4	29,8	42,9	57,4	64,4	66,8	94,4	100,0
PV_i	0,0	0,42	0,51	2,66	8,26	8,66	8,85	15,4	28,8	37,4	40,5	88,3	100,0
$PE_{i+1} - PE_i$	5,06	0,45	8,71	14,3	0,9	0,4	13,0	14,5	7,0	2,4	27,6	5,6	
$PV_{i+1} - PV_i$	0,42	0,09	2,15	5,6	0,4	0,2	6,5	13,4	8,6	3,1	47,8	11,7	

Abbildung 5-1: Streubereich für die Renditen der durch ihre jeweilige Rendite gemessenen Portefeuilles.



Faktor war mit 1 angenommen worden. Wäre der Risikofaktor mit 2 angenommen worden, so wäre die Sicherheit der Indexschätzung größer und folglich die entsprechenden Risiken kleiner geworden. Zur Interpretation der effizienten Portefeuilles nach dem Modell von SHARPE sind also sowohl der Risikofaktor als auch die statistische Sicherheit zu berücksichtigen.

In Abbildung 5-1 werden die erwarteten Renditen der Portefeuilles aus Tabelle 5-1 $\pm$ einer Standardabweichung dieser Renditen bei den einzelnen jeweils durch ihre Rendite gemessenen Portefeuilles dargestellt.

Während die Steigung der oberen Kurve in Abbildung 5-1 stets positiv ist und ständig größer wird, wird die Steigung der unteren Kurve ständig kleiner und ab einer höheren erwarteten Rendite als 38,0% sogar negativ, d. h. die untere Kurve erreicht bei 38,0% ein Maximum und fällt dann. Der Abstand der beiden Kurven vergrößert sich von diesem Punkt an schneller als vorher und somit auch das Risiko.

5.3 Kritischer Vergleich der Modellergebnisse untereinander und mit der tatsächlich eingetretenen Entwicklung

Es werden in diesem Abschnitt die im Anhang veröffentlichten Anwendungen der Modelle von MARKOWITZ und von SHARPE mit der retrospektiv ermittelten Wirklichkeit verglichen.[1)]

In Tabelle 5-6 werden die echten Renditen den in der ersten Anwendung des Modells von MARKOWITZ ermittelten Portefeuillerenditen gegenübergestellt.[2)] Unter echten Rendi-

1) Es sei betont, daß solche retrospektiven Vergleiche mit der Wirklichkeit nur einen bedingten Aussagewert besitzen, da der Kauf bestimmter Aktien immer Rückwirkungen an der Börse und damit Einfluß auf die tatsächlich zu erzielende Rendite ausübt.

2) Vgl. dazu auch Tabelle 5-1 S. 79 und S. 8* bis 10*.

Tabelle 5-6: Vergleich der Ende 1963 mit dem Modell von MARKOWITZ geschätzten Portefeuillerenditen mit den tatsächlichen Renditen von Ende 1964.

Porte-feuille Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	%														
geschätzte Rendite	58,98	42,21	29,73	28,15	23,81	20,15	19,66	19,35	19,00	16,78	15,83	15,75	15,72	13,88	10,86
echte Rendite	-13,3	4,09	12,85	14,05	16,77	19,86	20,18	20,01	19,49	18,30	18,35	18,28	18,30	17,23	14,81
	Zusammensetzung dieser Portefeuilles in Prozent														
DAIML	100,0	54,3	17,2	15,5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
SCHER		45,7	44,1	43,8	41,1	41,0	40,1	39,6	38,5	33,2	30,8	30,6	30,6	26,4	18,0
AEG			38,7	31,9	29,9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BEWAG				8,8	12,4	44,0	47,2	47,4	46,7	47,7	47,2	47,0	47,1	45,7	42,3
KHD					16,6	15,0	12,7	11,1	8,9	7,1	5,5	5,4	5,3	-	-
HEW								1,9	4,3	-	-	-	-	-	-
BMW									1,6	2,6	3,6	3,7	3,7	5,9	4,6
HARBE										9,4	12,9	13,2	13,2	18,6	32,8
SIEMS												0,1	-	-	-
VDTME													0,1	3,4	2,3

ten werden die Portefeuillerenditen verstanden, wie sie bei Investition in die entsprechenden Aktien - in der durch das Modell bestimmten Zusammensetzung - erzielt worden wären.

Da die Aktie DAIML in diesem Beispiel statt der geschätzten Rendite von +58,98% eine tatsächliche Rendite von -13,3% erzielt, weichen alle Portefeuilles, die die Aktie DAIML enthalten, erheblich von der Wirklichkeit ab. Bei dieser ersten Anwendung des Modells von MARKOWITZ fällt auf, daß die Differenz zwischen geschätzter Rendite und echter Rendite tendenziell umso kleiner wird, je mehr Aktien in einem Portefeuille enthalten sind.

In Tabelle 5-7 werden die echten Renditen den in der zweiten Anwendung des Modells von MARKOWITZ ermittelten Portefeuillerenditen gegenübergestellt.[1)]

Auch hier verursacht die Aktie DAIML wieder einen erheblichen Fehler, da sie statt der geschätzten Rendite von 83,04% nur eine Rendite von 30,4% gebracht hat. Ähnliches gilt für die Aktie SIEMS. Daß die tatsächlich erzielbare Rendite höher liegt, als die durch das Modell von MARKOWITZ geschätzte, ist nur bei den Portefeuilles 8-13 der Fall. Vergleicht man die Differenz zwischen den echten und den geschätzten Renditen, so fällt auf, daß sie tendenziell kleiner wird, je mehr verschiedene Aktien in einem Portefeuille enthalten sind. Ab Portefeuille 8 wird sie sogar positiv, d. h. der Investor würde angenehme Überraschungen erleben.

In Tabelle 5-8 werden die echten Renditen den in der dritten Anwendung des Modells von MARKOWITZ ermittelten Portefeuillerenditen gegenübergestellt.[2)] Hier wird die Portefeuillerendite, gegenüber der wirklich erzielten, in allen

---

1) Vgl. S. 82 Tabelle 5-2 und S. 11* bis S. 13*.
2) Vgl. S. 84 Tabelle 5-3 und S. 14* bis S. 15*.

Tabelle 5-7: Vergleich der Ende 1962 mit dem Modell von MARKOWITZ geschätzten Portefeuillerenditen mit den tatsächlichen Renditen von Ende 1963.

Porte-feuille Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	%												
geschätzte Rendite	83,04	72,63	48,41	35,03	33,66*	33,66*	24,35	21,00	20,70	14,70	7,45	3,25	2,11
echte Rendite	30,40	28,77	22,63	9,46	8,74	8,66	19,53	29,35	29,25	25,79	26,99	27,84	28,02
	Zusammensetzung dieser Portefeuilles in Prozent												
DAIML	100,0	78,5	31,4	2,7	-								
BMW		21,5	37,0	36,0	36,4	36,0	33,0	34,7	33,4	26,7	14,9	-	
AEG			31,6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
SIEMS				61,3	63,6	64,0	21,2	-	-	-	-	-	
BEWAG							45,8	49,3	51,1	53,5	42,1	23,8	21,0
HEW								16,0	15,5	-	-	-	-
HARBE										19,8	43,0	48,5	54,1
SCHER												27,7	24,9

* gerundete Werte

Tabelle 5-8: Vergleich der Ende 1965 mit dem Modell von MARKOWITZ geschätzten Portefeuillerenditen mit den tatsächlichen Renditen von Ende 1966.

Portefeuille Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	%									
geschätzte Rendite	10,46*	10,46*	10,33	10,32	9,14	8,45	7,15	5,17	4,96	4,87
echte Rendite	6,01	4,62	4,74	4,56	-1,34	-5,22	-24,12	-28,03	-28,86	-28,85
	Zusammensetzung dieser Portefeuilles in Prozent									
BEWAG	100,0	84,3	91,3	90,1	75,9	63,2	14,1	2,2	0,4	0,4
SCHER		15,7	-	-	-	-	-	-	-	-
BMW			8,7	9,9	-	-	-	-	-	-
SIEMS					24,1	36,8	19,4	3,0	-	-
AEG							66,5	74,9	79,3	78,9
KAUFH								19,9	19,2	19,1
VDTME									1,1	1,6

* gerundete Werte

Fällen überschätzt. Besonders kraß tritt die Überschätzung auf, wenn in einem Portefeuille mehr als zwei Aktien enthalten sind.

In Tabelle 5-9 werden die echten Renditen den in der ersten Anwendung des Modells von SHARPE ermittelten Portefeuillerenditen gegenübergestellt.[1] Vergleicht man die Differenz zwischen den echten und den geschätzten Renditen, so fällt auch hier bei einer gegenüber der Wirklichkeit zu ungünstigen Prognose von Portefeuillerenditen durch das Modell von SHARPE auf, daß sie tendenziell kleiner wird, je kleiner die geschätzte Portefeuillerendite ist und je mehr verschiedene Aktien in dem Portefeuille enthalten sind.

In Tabelle 5-10 werden schließlich die Ergebnisse, also die Renditen von Portefeuilles in der Zusammensetzung, wie sie in der zweiten Anwendung des Modells von SHARPE ermittelt wurden, der Wirklichkeit gegenübergestellt.[2] Es sei an dieser Stelle nochmals betont, daß von Rückwirkungen, wie sie der Kauf bestimmter Aktien an der Börse auslöst, bei diesen Gegenüberstellungen abgesehen wurde.

Vergleicht man wieder die Differenz zwischen den echten und den geschätzten Renditen, so fällt auf, daß sie umso kleiner ist, je kleiner die geschätzte Rendite wird. Des weiteren fällt auf, daß die Differenz tendenziell umso kleiner wird, je mehr Aktien in einem Portefeuille enthalten sind.

Nachdem nun die hier dargestellten Anwendungen der Modelle von MARKOWITZ und SHARPE im einzelnen behandelt wurden, sollen die Ergebnisse und deren Abweichungen zur Wirklichkeit in zusammengefaßter Form einander gegenübergestellt werden. Es wird also das Abschneiden der zwei un-

---

1) Vgl. S. 86 Tabelle 5-4 und S. 16* bis S. 19*.
2) Vgl. S. 89 Tabelle 5-5 und S. 20* bis S. 27*.

Tabelle 5-9: Vergleich der Ende 1962 mit dem Modell von SHARPE geschätzten Portefeuillerenditen mit den tatsächlichen Renditen von Ende 1963.

Porte-feuille Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	%									
geschätzte Rendite	17,8	17,6	15,3	14,3	13,1	3,2	2,7	1,1	0,7	-1,4
echte Rendite	31,9	23,8	15,3	13,0	20,5	27,4	27,3	28,3	28,1	24,3
	Zusammensetzung dieser Portefeuilles in Prozent									
GLSTO	100,0	32,0								
FABAY		68,0	48,7	24,2	19,0	3,8	3,3	1,8	1,5	0,5
FELTN			51,3	75,8	60,8	28,1	26,4	17,2	15,3	7,7
WINHA					20,2	32,6	32,0	27,0	25,9	21,2
CONGU						35,5	36,2	38,3	38,7	40,6
RWE							2,1	5,3	5,8	6,0
KHD								10,4	11,7	9,0
METGE									1,1	1,2
SIEMS										13,8

Tabelle 5-10: Vergleich der Ende 1965 mit dem Modell von SHARPE geschätzten Portefeuillerenditen mit den tatsächlichen Renditen von Ende 1966.

Portefeuille Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	%												
geschätzte Rendite	60,8	57,7	42,5	41,1	37,2	29,2	22,0	21,8	21,3	13,4	8,5	8,3	5,5
echte Rendite	-29,4	-25,1	-8,0	-8,7	-11,2	-22,4	-16,5	-16,3	-16,2	-11,4	-10,3	-10,4	-7,9
	Zusammensetzung dieser Portefeuilles in Prozent												
KHD	100,0	85,5	8,4	6,1									
ESCHB		14,5	25,6	24,4	20,4	8,3	5,9	5,8	5,6	2,1			
BMW			66,0	63,0	52,3	3,5	0,5	0,4	-	-			
SALZD				6,5	16,7	53,3	43,0	42,6	41,7	24,5	13,8	13,2	2,6
VDTME					10,6	34,9	28,2	27,9	27,2	11,0	-	-	-
BEWAG							22,4	22,8	23,5	39,5	46,8	47,3	55,6
DEGUS								0,5	1,0	9,7	12,2	12,3	13,0
MANNS									1,0	13,2	14,1	14,1	9,8
HOESH											12,5	13,1	19,0

tersuchten Modelle untereinander verglichen, nachdem die Zusammensetzung der einander entsprechenden Portefeuilles, von welcher die echten Renditen abhängen, bekannt ist. Dabei wird jeweils von den gleichen Zeiträumen ausgegangen.

In Tabelle 5-11 werden die Ergebnisse der Schätzungen am Jahresende 1962 mit dem Modell von MARKOWITZ und dem Modell von SHARPE einander gegenübergestellt. Betrachtet man das Abschneiden der beiden Modelle untereinander, so fällt auf, daß das Modell von MARKOWITZ für diesen Zeitraum mehr Eckportefeuilles empfiehlt. Weiter fällt auf, daß gegenüber dem Modell von SHARPE die Spanne zwischen größter empfohlener und kleinster empfohlener Portefeuillerendite erheblich größer ist. Das Modell von MARKOWITZ empfiehlt Portefeuillerenditen, die bei den hohen Renditen stark unter den echt erzielten Renditen liegen, bei den niedrigeren (ab Portefeuille 8) erwarteten Renditen von den echt erzielten aber erheblich übertroffen werden. Allerdings ist zu bemerken, daß trotz Unter- oder Überschätzungen sämtliche echte Renditen bei dem Modell von MARKOWITZ positiv sind, so daß bei dem ungünstigsten Portefeuille Nr. 6 (vgl. Tabelle 5-7) von dem Investor immer noch eine Rendite von 8,66% erzielt worden wäre. So hätte er bei Investition in die durch das Modell von MARKOWITZ empfohlenen Aktien bei sämtlichen Portefeuilles keinen Verlust erlitten, trotz unangenehmer Überraschungen bei den ersten 7 Portefeuilles.

Das Modell von SHARPE empfiehlt Portefeuillerenditen, die beinahe alle, die Ausnahme bildet Portefeuille Nr. 4, erheblich unter den echten Renditen liegen, d. h. ein Investor würde in diesem Falle fast durchweg angenehm überrascht. Auch hier sind sämtliche echten Renditen positiv, bei dem Portefeuille Nr. 4, bei dem ein Investor etwas enttäuscht sein könnte, da die Sollrendite nicht ganz erreicht wird, beträgt die echte Rendite immerhin noch 13,0%. Die echten Renditen sind in fünf Fällen besser als die vergleichbaren durch das Modell von MARKOWITZ empfohlenen.

Tabelle 5-11: Gegenüberstellung der zum Jahresende 1963 mit den Modellen von MARKOWITZ und SHARPE geschätzten Portefeuillerenditen und deren Differenzen zu den retrospektiv ermittelten echten Renditen.

Portefeuille Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	%												
Rendite MARKOWITZ	83,04	72,63	48,41	35,03	33,66*	33,66*	24,35	21,00	20,70	14,70	7,45	3,25	2,11
Differenz zur Wirklichkeit	-52,64	-43,86	-25,78	-25,57	-24,92	-25,00	-4,82	+8,35	+8,55	+11,09	+19,54	+24,59	+25,91
Abweichung in % der Schätzung	-63,4	-60,4	-53,3	-73,0	-74,0	-74,3	-19,8	+39,8	+41,3	+75,44	+262,3	+756,6	+1228,0
Rendite SHARPE	17,8	17,6	15,3	14,3	13,1	3,2	2,7	1,1	0,7	-1,4	-	-	-
Differenz zur Wirklichkeit	+14,1	+6,2	± 0	-1,3	+6,1	+24,2	+24,6	+27,2	+27,4	+25,7	-	-	-
Abweichung in % der Schätzung	+79,2	+35,2	± 0	-9,1	+46,6	+756,3	+911,1	+2472,7	+3914,3	1835,7	-	-	-

* gerundete Werte

In weiteren fünf Fällen sind aber die von dem Modell von MARKOWITZ empfohlenen Portefeuillerenditen besser als die des SHARPE-Modells. Außerdem werden durch das Modell von MARKOWITZ weitere drei Portefeuilles mit guten echten Renditen empfohlen.

In Tabelle 5-12 werden die Ergebnisse der Schätzungen am Jahresende 1965 mit den Modellen von MARKOWITZ und SHARPE einander gegenübergestellt. Vergleicht man wieder das Abschneiden der beiden Modelle untereinander, so fällt auf, daß das Modell von MARKOWITZ für diesen Zeitraum weniger Eckportefeuilles als das Modell von SHARPE empfiehlt. Daneben fällt auf, daß gegenüber dem Modell von SHARPE die Spanne zwischen größter empfohlener und kleinster empfohlener Portefeuillerendite erheblich kleiner ist. In dieser Schätzung empfiehlt das Modell von MARKOWITZ Portefeuillerenditen, die sämtlich unter den geschätzten liegen. Ab dem Eckportefeuille 5 (vgl. Tabelle 5-8) würde ein Investor tatsächliche Verluste erleiden, wenn er die vom Modell empfohlenen Portefeuilles gekauft hätte.

Das Modell von SHARPE empfiehlt für diesen Zeitraum Portefeuillerenditen, die sämtlich sehr stark über den echten Renditen liegen. Da die entsprechenden echten Renditen in allen Fällen absolut negativ sind, würde ein Investor in allen Fällen sehr unangenehme Überraschungen erleben. Die echten Renditen sind in vier Fällen besser, in sechs Fällen aber schlechter als die durch das Modell von MARKOWITZ empfohlenen. Außerdem werden durch das Modell von SHARPE gegenüber dem Modell von MARKOWITZ in diesem Zeitraum weitere drei Portefeuilles mit schlechten, d. h. absolut negativen echten Renditen empfohlen, so daß man sagen kann, daß die Schätzung mit dem Modell von MARKOWITZ insgesamt besser ist. Vor allem werden die hohen Verluste erst bei Schätzrenditen des Modells von MARKOWITZ erzielt, die gleich oder unter 7,15% liegen; solche Anlagen in Aktien sind aber verhältnismäßig uninteressant.

Tabelle 5-12: Gegenüberstellung der zum Jahresende 1965 mit den Modellen von MARKOWITZ und SHARPE geschätzten Portefeuillerenditen und deren Differenzen zu den retrospektiv ermittelten echten Renditen.

Portefeuille Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	%												
Rendite MARKOWITZ	10,46*	10,46*	10,33	10,32	9,14	8,45	7,15	5,17	4,96	4,87	-	-	-
Differenz zur Wirklichkeit	-4,45	-5,84	-5,59	-5,76	-10,48	-13,67	-31,27	-33,20	-33,82	-33,72	-	-	-
Abweichung in % der Schätzung	-42,5	-55,8	-54,1	-55,8	-114,7	-161,8	-437,3	-642,2	-681,9	-692,4	-	-	-
Rendite SHARPE	60,8	57,7	42,5	41,1	37,2	29,2	22,0	21,8	21,3	13,4	8,5	8,3	5,5
Differenz zur Wirklichkeit	-90,2	-82,8	-50,5	-49,8	-48,4	-51,6	-38,5	-38,1	-37,5	-24,8	-18,8	-18,7	-13,4
Abweichung in % der Schätzung	-148,4	-143,5	-118,8	-121,2	-130,1	-176,7	-175,0	-174,8	-176,1	-185,1	-221,2	-225,3	-243,6

* gerundete Werte

5.4 Schlußfolgerungen aus den Ergebnissen

Bei den retrospektiven Untersuchungen wurde rein empirisch von verschiedenen "Phasen des Aktienmarktes" ausgegangen. Unter "Phasen des Aktienmarktes" werden in diesem Zusammenhang Teilabschnitte der Entwicklung des Aktienmarktes verstanden.[1] Es sollen drei Phasen des Aktienmarktes, gemessen durch eine Art von Extrempunkten, unterschieden werden. Diese Phasen sind Aufschwung, Abschwung und Stagnation des Aktienmarktes. Die Extrempunkte sind dementsprechend Tiefstand und Höchststand des Kursniveaus oder anderer Aktienindizes.

Da bei sämtlichen Anwendungen der Modelle der Portfolio Selection von einem Planungshorizont von einem Jahr und von den Kursen des letzten Börsentages eines Kalenderjahres, sowie bei dem Modell von SHARPE zusätzlich von dem Indexstand des letzten Börsentages ausgegangen wurde, sollen die Phasen des Aktienmarktes auch an den Werten des letzten Börsentages eines Kalenderjahres beurteilt werden. Danach befand sich der Aktienmarkt in der BRD weitgehend unabhängig davon, ob man den Aktienindex des Statistischen Bundesamtes, das Aktienkursniveau oder die tatsächliche, durchschnittliche Dividendenrendite der Aktiengesellschaften als Beurteilungskriterium heranzieht, am Jahresende 1960 am Beginn einer Abschwungphase, am Jahresende 1962 am Beginn einer Aufschwungphase und am Jahresende 1965 mitten in einer Abschwungphase. Als Phase relativer[2] Stagnation läßt sich der Zeitraum von Ende 1963 bis Ende 1964 interpretieren.

---

1) Auf verursachende Faktoren, warum es zu Bewegungen auf dem Aktienmarkt kommt, kann hier nicht eingegangen werden.

2) Da die Kurse bzw. der Aktienindex während des Jahres 1963 noch leicht anstieg, soll von einer relativen Stagnation gesprochen werden.

Vergleicht man die Modellergebnisse[1] unter diesem Gesichtspunkt mit der Wirklichkeit, so läßt sich - ungeachtet der Schwierigkeit, Modelleinflüsse von Einflüssen der Prognose des Eingabematerials zu trennen - folgendes feststellen:

a) Liegt der Zeitpunkt der Schätzung und der Planungshorizont, also der Zeitpunkt, auf den sich die Schätzung erstreckt, in einer Phase des Aufschwungs, so werden unabhängig von der Art des angewandten Kalkülmodells die Ergebnisse der Schätzung tendenziell zu niedrig, d. h. zu pessimistisch sein. Bei dem Modell von SHARPE tritt dieser Effekt stärker auf als bei dem Modell von MARKOWITZ.

b) Liegt der Zeitpunkt der Schätzung und der Planungshorizont in einer Phase des Abschwungs, so werden die Ergebnisse der Schätzung gegenüber der Wirklichkeit tendenziell zu hoch, d. h. zu optimistisch sein. Auch dieser Effekt tritt bei dem Modell von SHARPE stärker hervor, als bei dem Modell von MARKOWITZ.

c) Liegt der Zeitpunkt der Schätzung und der Planungshorizont in einer längeren Phase der Stagnation, so lassen sich über Mittelwerte aus vergangenen Perioden als Erwartungswerte für Erträge mit dem Modell von MARKOWITZ brauchbare Ergebnisse erzielen. Die Vorhersagen entsprechen einigermaßen der Wirklichkeit, und in diesem Falle wird von dem Modell eine wirklich optimale E,V-Kombinationskurve bestimmt.

Wenn die Phasenlänge sehr kurz ist und der Aktienmarkt sich in einem Zustand heftiger Auf- und Abwärtsbewegungen befindet, so können durch Kalkülmodelle der Portfolio Selection

---

1) Auch für das Jahresende 1960 wurden Beispiele durchgerechnet, die allerdings nicht in dieser Arbeit veröffentlich werden.

keine die spätere Wirklichkeit einigermaßen wiedergebende Anlageempfehlung erarbeitet werden, d. h. die Modelle sind mehr langfristiger Natur.[1] Daneben hängt die Qualität der Modellergebnisse in erheblichem Umfang von der Güte der Eingabedaten ab, wobei es kaum möglich ist, genauer zwischen den durch die Eingabedaten und den durch die verschiedenen Modelle verursachten Wirkungen zu unterscheiden. Durch die unterschiedliche Menge von Informationen, die in den verschiedenen Modellen verarbeitet werden, sind einige Unterschiede auf der finanzanalytischen Vorstufe, d. h. bei der Schätzung der Eingabedaten, bedingt. Lassen sich die Phasen oder auch Schwünge des Aktienmarktes einigermaßen zutreffend prognostizieren, so können die Modelle der Portfolio Selection brauchbare, zusätzliche Informationen anbieten.

Zur Anwendung des im 2. Kapitel beschriebenen Instrumentariums zur Bestimmung effizienter oder optimaler Portefeuilles muß die Wertveränderung der Investitionsobjekte vorausgeschätzt werden. Die für die Anwendung der Modelle von MARKOWITZ und SHARPE erforderlichen Eingabegrößen wurden in dieser Untersuchung auf der Basis von Vergangenheitswerten ermittelt. Die Wertpapieranalyse arbeitet zum Teil mit aufwendigeren Verfahren, wobei allerdings auch deren Wert umstritten ist.

Für die Ausgangsdaten einer Schätzung mit dem Modell von SHARPE ist eine Bereinigung des Kursniveaus erforderlich, wenn man es als Index vewwendet.

---

1) Zu diesem Zweck wurden einige Modellergebnisse mit der tatsächlichen Entwicklung nach zwei Jahren verglichen. Sowohl im Falle der Unterschätzung als auch im Falle der Überschätzung waren die Abweichungen zur Wirklichkeit nach zwei Jahren erheblich geringer. Streng genommen ist es nicht zulässig, die Modellergebnisse, die mit einem Planungshorizont von einem Jahr gemacht wurden, mit der tatsächlichen Wirklichkeit nach zwei Jahren zu vergleichen.

"Die Kenntnis des Kursniveaus, wie es in dem vom Statistischen Bundesamt in Wiesbaden berechneten Kursdurchschnitt zum Ausdruck kommt, ist dazu als Maßstab unzureichend, da die aus Kapitalerhöhungen resultierenden Bezugsrechtsabschläge nicht eliminiert werden, so daß z. B. eine Beurteilung der wertmäßigen Entwicklung einer einmaligen hypothetischen Kapitalanlage in einer "deutschen Durchschnittsaktie" anhand des Kursdurchschnitts nicht möglich ist."[1]

Macht man jedoch eine sogenannte "freie Schätzung"[2] mit dem Modell von MARKOWITZ, so ist es auch hier erforderlich, für die Berechnung der Ausgangsdaten, d. h. zur Berechnung der erwarteten Renditen, bereinigte Kurse zu verwenden, da sonst Verzerrungen auftreten.[3] Aus gleichen Gründen ist es angebracht, für den Vergleich mit der tatsächlichen Entwicklung nur auf der Basis von bereinigten Kursen berechnete Renditen zu verwenden.[4]

Dabei besteht ein Problem darin, daß Wertpapieranalytiker ihre Prognosen von Renditen und deren Risiken im allgemeinen nicht in den Größen "Erwartungswert" und "Varianz" und die Verbundenheit zwischen den einzelnen Renditen nicht als Kovarianz ausdrücken. Es gibt allerdings Vorschläge, welche zwischen den Ergebnissen der Wertpapieranalyse und den erforderlichen Ausgangsdaten der Optimierungsrechnung "vermitteln" wollen.

---

1) U. HIELSCHER: Das optimale Aktienportefeuille, loc. cit., S. 386f. Rein empirisch wurde vom Verfasser gefunden, daß der Index der Aktienkurse des Statistischen Bundesamtes besser geeignet ist, den Ertrag einer Kapitalanlage unbeeinflußt von Vorgängen wie Kapitalerhöhungen zu erfassen.

2) Freie Schätzung oder "free estimate" werden in der angelsächsischen Literatur die Ausgangsdaten genannt, die unabhängig von einem Index als Haupteinflußgröße geschätzt werden, d. h. sämtliche erwarteten Einzelrenditen und deren Kovarianzen werden explizit geschätzt.

3) Zu diesem Punkt sei die Darstellung von HIELSCHER empfohlen. Vgl. U. HIELSCHER: Das optimale Aktienportefeuille, loc. cit., S. 395-413.

4) Bereinigt wurden immer die Kurse des Vorjahres, d. h. der vergangenen Betrachtungsperiode. Will man die Rendite zum Jahresende 1967 schätzen, so nimmt man den bereinigten Endkurs des Jahres 1966.

"Doch gehen alle 'Übergangslösungen' zu sehr von den Erfordernissen der Portfolio Selection aus, der derzeitige Stand der Wertpapieranalyse wird zu wenig berücksichtigt."[1)]

Wie bereits erwähnt,[2)] müssen für die Modelle der Portfolio Selection eine große Zahl von Eingabedaten präpariert werden. Dabei ist eine "gute", eine die später einsetzende Entwicklung einigermaßen zutreffende Prognose der Einzeldaten hinsichtlich der Zusammenfassung und Optimierung dieser Einzeldaten zu Portefeuilleprognosen, von großer Bedeutung. An den Endergebnissen, also an den geschätzten Portefeuillerenditen, läßt sich später nur schwer auseinanderhalten, was auf Modellschwächen und was auf unzutreffende Prognosen von Einzeldaten zurückzuführen ist. Genauso schwierig ist es, die Ergebnisse der verschiedenen Modelle im Vergleich untereinander, in einen Prognoseeinfluß und in einen Modelleinfluß zu trennen, da bei vergleichbaren Zeiträumen nur in Ausnahmefällen die gleichen Aktien in einem Portefeuille enthalten sind. Unter diesen Einschränkungen kann aber doch festgehalten werden, daß die nach dem Modell von MARKOWITZ zusammengestellten Portefeuilles den nach dem Modell von SHARPE zusammengestellten Portefeuilles in vielen Fällen überlegen sind.

---

1) H. MÜLLER: "Portfolio Selection" als Entscheidungsmodell deutscher Investmentgesellschaften, Diss. Frankfurt 1970, S. 181.

2) Vgl. S. 16 - 20 und S. 72 im Falle des Modells von MARKOWITZ, S.49 - 53 und S. 73 im Falle des Modells von SHARPE, sowie S. 67 und 68.

6. DIE ANWENDUNGEN DER MODELLE IN DER ANLAGEPRAXIS

6.1 Zeit- und Kostenschätzungen bei Verwendung der benutzten Computerprogramme zur Portfolio Selection

Aussagen über die Laufzeit von Programmen bei Iterationsverfahren, wie sie von Modellen der Portfolio Selection verlangt werden, zu machen, ist schwierig. Schätzungen der Gesamtlaufzeit werden ferner durch die verschiedenen anwendbaren Ausgabebedingungen der einzelnen Programme erschwert.

Bei Verwendung des früher beschriebenen[1] eigenen Programms zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ benötigt die Ausführung[2] für ein Problem mit vierzig Wertpapieren einschließlich der Berechnung der benötigten Prognosedaten etwa 2 1/2 Minuten auf einem Modell 360/50.

Falls das Programm nicht "compiliert" und "gebunden" in einer Systembibliothek gespeichert wird, so kommen für die Umwandlung in Maschinensprache und das Binden etwa 3 Minuten zur Ausführungszeit an Systemzeit hinzu. Rechnet man für die Minute auf einer IBM 360/50 ca. 50,-- DM als Mietkosten, so kommt die Durchrechnung eines Problems

---

1) Vgl. S. 69 bis 72 . Der Aufwand für die Programmierung und anschließendes Austesten des Programms lag bei dem Monitorbetrieb des Rechenzentrums der Universität Münster für das eigene Programm zur Portfolio Selection bei ca. 8 Monaten.

2) Unter Ausführung wird die reine Zeit für die Abarbeitung der Daten verstanden. Jedes Programm in einer problemorientierten Programmiersprache wie Fortran-IV muß vor der Ausführung in die entsprechende Maschinensprache übersetzt, d. h. compiliert, und die einzelnen Programmteile zusammengefaßt und in den Kernspeicher geladen, d. h. gebunden, werden. Das kann einmalig durch Übernahme in eine Systembibliothek oder aber auch für jeden Lauf erneut geschehen.

mit vierzig Wertpapieren auf ca. 130,-- DM zu stehen. Auch diese reinen Rechenkosten bei Miete einer entsprechenden Anlage scheinen für größere Anleger noch erträglich zu sein. Häufig ist es aber bei institutionellen oder großen Privatanlegern so, daß sie noch freie Kapazitäten auf hauseigenen Anlagen haben, um wenigstens einmal im Monat ein Wertpapierproblem durchzurechnen.

Durch Benutzung des früher beschriebenen 1401-Programms[1] zur Anwendung des Modells von SHARPE wurden fünf Probleme mit jeweils vierzig Wertpapieren durchgerechnet. Einschließlich Druckzeit werden für ein Problem durchschnittlich 5 Minuten benötigt. Kalkülprobleme bis zu fünfzig Wertpapieren werden häufig noch als kleinere Probleme bezeichnet. Bei durchschnittlichen Mietkosten von 600,-- DM pro Stunde für eine entsprechende IBM 1401-Anlage, betragen die reinen Rechenkosten für ein Problem mit vierzig Wertpapieren ca. 50,-- DM. Das scheint sogar für kleinere Anleger noch einigermaßen erträglich zu sein.

Der Hauptaufwand und damit auch der größte Kostenanteil einer Schätzung liegt in der Beschaffung einschließlich des Ablochens der Ausgangsdaten. Zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ sind bei dem eigenen Programm für jedes Wertpapier neben dem Wertpapiernamen einige echte Renditen aus vergangenen Perioden und ein subjektiver Korrekturfaktor anzugeben. Die benötigten Kovarianzen zwischen diesen Erträgen unter Berücksichtigung des Korrekturfaktors errechnet das Programm dann selbsttätig, wodurch die Rechenzeit zwar geringfügig zunimmt, die Vorbereitung der Eingabedaten aber wesentlich vereinfacht wird. Der Aufwand

---

1) An dieser Stelle möchte ich Herrn DITZ von der Geschäftsstelle Münster der IBM für die Beschaffung des IBM 1401-Programmes zur Portfolio Selection und Herrn NAEGELE vom Testrechenzentrum in Sindelfingen der IBM für die Durchrechnung herzlich danken. Vgl. zu der Beschreibung des 1401-Programms S. 73-76.

einschließlich dem Ablochen der Karten dürfte an Kosten etwa das Anderthalbfache der reinen Rechenkosten ausmachen.

Zur Anwendung des Modells von SHARPE müssen geschätzter Stand und Streuung des verwendeten Index, bei Benutzung des IBM 1401-Programms, das Verträglichkeitsmaß der Schätzung und für jedes einzelne Wertpapier der augenblickliche Kurs, die geschätzte Dividende angegeben, sowie neun Kursschätzungen gemacht werden. Bei m Wertpapieren müssen also 11 x m Wertpapier- plus drei allgemeine Daten präpariert werden. Dazu kommen noch die Kurztitel der Wertpapiernamen und andere Daten, wenn man den Wert des gegenwärtig gehaltenen Portefeuilles wissen möchte oder sonstige fakultative Nebenbedingungen gewünscht werden. Bei dem Eingabeformat des IBM 1401-Programms sind das m x 4 plus 6 allgemeine 80-spaltige Datenkarten. Der Aufwand einschließlich Ablochen dürfte an Kosten das etwa Vierfache der reinen Rechenkosten ausmachen.

In den USA gibt es seit ca. fünf Jahren Privatfirmen, die solche allgemeinen Wertpapierdaten auf Leihbändern in mittlerweile wöchentlichen Abständen anbieten. Diese können durch geringe programmtechnische Änderungen direkt von dem IBM-Programm zur Anwendung des Modells von SHARPE oder von dem eigenen Programm übernommen werden. Ferner besteht immer die Möglichkeit, in einem gesonderten Lauf die interessierenden Daten von einem Band auf Karten in dem gewünschten Format ausstanzen zu lassen. Leider werden in der Bundesrepublik Deutschland bisher keine derartigen Dienstleistungen angeboten.

6.2 Bisherige und zukünftige Anwendungen von Modellen der Portfolio Selection

Eines der ältesten EDV-Programme, das für ein Kalkülmodell der Portfolio Selection herangezogen wurde, ist der RAND-QP-Code; mit diesem Programm haben MARKOWITZ und SHARPE gerechnet. 1962 kam durch die IBM das Portfolio Selection Programm (IB PS 90) IBM 7090 Programm 7090-FI-03X heraus; zeitlich etwas früher war von der IBM auch ein Programm zur Portfolio Selection für Anlagen des Systems 7074 entwickelt worden. Anwendungen des Programms IBM 7074 Portfolio Selection Programm 7074-FI-02X sind nicht bekannt geworden. Das Portfolio Selection Programm IBM 7090-FI-03X war ursprünglich in Fortran-II geschrieben und wurde inzwischen auch in Fortran-IV codiert.[1] Die Fortran-II-Version wurde u. a. von COHEN und POGUE, später von HIELSCHER, allerdings nur für wissenschaftliche Zwecke, angewendet. Während HIELSCHER mit dem Modell von MARKOWITZ lediglich ein 3-Wertpapierbeispiel durchgerechnet hat, erstrecken sich die Anwendungen von COHEN und POGUE zwar auf vier Modelle,[2] sind aber lediglich auf amerikanische Verhältnisse zugeschnitten und sind auch von der benötigten Anlagengröße her in Europa nicht nachzuvollziehen.[3]

---

1) Dieses Programm entspricht dem in Fortran-II geschriebenen Programm; es wird von der IBM zwar kostenlos, aber ohne jede sonstige Unterstützung zur Verfügung gestellt.

2) Vgl. dazu S. 54-59.

3) Das eigene Programm wurde schließlich dem IBM 7090-FI-03X Programm aus folgenden Gründen vorgezogen:

   a) Da im Raume Münster keine 7090 oder 7094 zur Verfügung steht,
   b) da das 7090-Programm nicht ohne erhebliche Modifikation auf der Anlage des Deutschen Rechenzentrums in Darmstadt benutzt werden kann.

   Zu den erforderlichen Programmänderungen vgl. auch U. HIELSCHER: Zu den Grundlagen der optimalen Kapitalanlageplanung am Aktienmarkt, Diss. Darmstadt 1969, S. 264.

Eine Anwendung der Fortran-IV-Version des 7090-Programms zur Portfolio Selection ist nicht bekannt geworden. Für den Aktienmarkt in der BRD sind bisher noch keine größeren Anwendungen des Modells von MARKOWITZ gemacht worden, was MÜLLER bestätigt: "In Deutschland liegen noch keine Ergebnisse für eine Beurteilung des MARKOWITZ-Modells vor."[1)]

Noch 1962, mit einer deutschen Neufassung von 1965, brachte die IBM das erwähnte[2)] 1401-Programm heraus, das geeignet ist, das Modell von SHARPE anzuwenden. Dieses Programm wurde und wird von verschiedenen Banken zur Anlageberatung herangezogen. Seit dem Sommer 1967 wird von der Zeitschrift "CAPITAL" eine Anlageberatung auf der Grundlage des IBM-1401-Programms in monatlichen Abständen durchgeführt. Dieses Programm wurde von der IBM zum Frühjahr 1970 auf das System /360 umgestellt. In dieser Version heißt das Programm: "Optimale" Wertpapiermischungen mit dem IBM System /360". Es ist in Basis-Fortran-IV geschrieben und kann von dem Modell 25 aufwärts auf Anlagen mit mindestens 32 K Kernspeicherstellen eingesetzt werden. Neben einem Kartenleser und einem Schnelldrucker benötigt das Programm noch einen Magnetplattenstapel als externen Zwischenspeicher.

Die Modelle und damit die Programme zur Portfolio Selection werden in der Zukunft Erweiterungen derart erfahren, daß auch nichtlineare Nebenbedingungen zugelassen werden[3)] und

---

1) H. MÜLLER: Loc. cit., S. 181.

2) Vgl. S. 73ff.

3) Eine typische nichtlineare Nebenbedingung verlangt z.B., daß nur solche Investitionen, die einen bestimmten Mindestertrag haben, getätigt werden dürfen. Jede Aktie, die in ein Portefeuille aufgenommen werden soll, muß z. B. einen erwarteten Mindestertrag von 5% p.a. besitzen. Eine andere nichtlineare Nebenbedingung bestünde darin, daß nur in ganzzahligen Partien in ein Wertpapier investiert werden darf.

damit ein Stück wirklichkeitsnäher sein. Ferner wird es möglich sein, auch ein gewisses "Timing" bei der Anlageplanung zu berücksichtigen. Inwieweit Kreditkäufe und Leerverkäufe von Wertpapieren von den Modellen bewältigt werden können, läßt sich bis heute nicht absehen. Über Ansätze[1] ist die Literatur bisher noch nicht hinausgekommen. Sobald es möglich ist, Korrelationskoeffizienten bzw. Kovarianzen zwischen den Erträgen von Elementen aus Portefeuilles allgemeinster Art[2] zu bestimmen, werden auch in dieser Richtung weitere Anwendungsmöglichkeiten liegen; z. B. könnten die Modelle dann auf Investitionsrechnungen angewendet werden.

In diesem Zusammenhang sei noch erwähnt, daß der Computer-Service der Sparkassen,[3] der seit Anfang 1970 von diesen angeboten wird, nicht auf der Grundlage von Modellen der Portfolio Selection betrieben wird.

Kommerzielle Anwendungen des Modells von MARKOWITZ liegen zumindest für den Bereich der BRD bisher nicht vor. Das Modell von SHARPE wurde und wird von einigen Banken und Anlageberatungsdiensten zur Anlageberatung verwendet. Mit der weiteren Ausbreitung von EDV-Anlagen ist es lediglich eine Frage der Zeit, wann Kalkülmodelle der Portfolio Selection zur Anlageberatung auf breiter Basis oder von vielen Anlegern unmittelbar herangezogen werden.

---

1) Vgl. D.D. HESTER: Loc. cit., S. 41-50 und W.F. SHARPE: Loc. cit., S. 285-287.

2) Zum Portefeuillebegriff vgl. S. 8f.

3) Vgl. S. 13f.

7. ZUSAMMENFASSUNG UND SCHLUSS

Ansatzpunkt zur Beurteilung der Möglichkeiten der Modelle der Portfolio Selection bildeten das Modell von MARKOWITZ, sowie das Modell von SHARPE in ihrer einfachen Form. Fakultative Nebenbedingungen, die ein Investor einem Portefeuille auferlegen kann, wurden in keinem Falle berücksichtigt.[1] Die Aufgabe wurde darin gesehen, nach einer kurzen Darstellung[2] von Kalkülmodellen der Portfolio Selection mit historischen Daten die Handhabung und die Brauchbarkeit dieser Modelle zu überprüfen. Daneben sollten das Modell von MARKOWITZ und das Modell von SHARPE, d. h. also die beiden von den benötigten Eingabedaten und der benötigten Rechenzeit her extremen Modelle, verglichen werden.

Bei der Lösung dieser Aufgaben stellten sich drei Probleme.

Erstens: Die Beschaffung und Überarbeitung von Eingabedaten für die beiden angewandten Modelle der Portfolio Selection. Da in den Eingabedaten im Grunde alle Angaben, bevor sie durch ein Kalkülmodell der Portfolio Selection aggregiert und optimiert werden, bereits enthalten sind, wird durch sie die Qualität einer Schätzung bestimmt. Diese Eingabedaten können subjektiv geschätzt oder mit Hilfe von finanzanalytischen Prognosemodellen bestimmt werden. Die Eingabedaten müssen weiter in der Form vorliegen, wie es die zur Durchrechnung verwendeten Programme verlangen. Aus Vergleichbarkeitsgründen wurden die Eingabedaten der Modelle nur auf

---

1) Solche fakultativen Nebenbedingungen sind für die Praxis wichtig, nicht aber für das Untersuchungsziel dieser Arbeit.

2) Vgl. S. 15 bis S. 59.

der Basis von historischen Daten gewonnen. Für den bei dem Modell von SHARPE verwendeten Aktienindex des Statistischen Bundesamtes wurde als Schätzwert das arithmetische Mittel der letzten fünf Jahre vor dem Schätzungszeitpunkt plus (minus) einer Standardabweichung herangezogen. Zur Schätzung der erwarteten Erträge jeder Einzelaktie und deren Streuung, sowie den Kovarianzen zwischen diesen Erträgen, wie sie von dem Modell von MARKOWITZ verlangt werden, wurden das arithmetische Mittel und die Kovarianzen aus den echten Erträgen der letzten fünf Jahre vor dem Schätzungszeitpunkt herangezogen. Diese Werte wurden nicht durch subjektive Korrekturfaktoren, wie es möglich wäre, verändert.

Zweitens: Die Beschaffung von geeigneten Programmen zur praktischen Anwendung von Modellen der Portfolio Selection. Damit im Zusammenhang stand das Problem, Rechenzeit auf entsprechenden Anlagen zu bekommen. Zur Durchrechnung des Modells von MARKOWITZ wurde ein eigenes Programm zur Portfolio Selection entwickelt; es kann Interessenten eventuell zur Verfügung gestellt werden.[1)] Zur Durchrechnung des Modells von SHARPE wurde das IBM 1401-Portfolio Selction Programm (1401-FI-04X) verwendet.

Drittens: Die Überprüfung der Anwendungen auf ihre Brauchbarkeit. Dies erfolgte durch ex post-Analyse, indem die Schätzungen von Portefeuillerenditen durch die Modelle der bekannten Wirklichkeit gegenübergestellt wurden. Dazu ist anzumerken, daß solche vergangenheitsbezogenen Analysen, auf die sich die Beurteilung der Möglichkeiten der Modelle stützt, insofern problematisch sind, als die tatsächlichen Erwartungen sich nachträglich niemals nachempfinden lassen. Außerdem haben Käufe bestimmter Aktien, die aufgrund einer Anwendung

---

1) Zur Benutzung des eigenen Programms auf kleinen Anlagen und zur Anwendung von fakultativen Nebenbedingungen müßte das Programm überarbeitet werden. Es ist in Tabelle 13* auf S. 18 * bis S. 47 * angegeben.

eines Kalkülmodells der Portfolio Selection getätigt werden, stets Rückwirkungen an der Börse. Im allgemeinen dürfte es wohl so sein, daß diese Rückwirkungen günstig für einen Anleger sind, wenn er nach den Empfehlungen eines Modells der Portfolio Selection handelt, obwohl zumindest die Modelle von MARKOWITZ und SHARPE nur selten die gleichen Aktien und dann auch nicht mit denselben Anteilen auswählen.

Zusammenfassend läßt sich daher feststellen, daß der Hauptnutzen der Modelle der Portfolio Selection bisher darin besteht, daß der sie anwendende Anleger gezwungen ist, seine Anlageentscheidung auf allen Stufen des Entscheidungsprozesses rational zu durchdenken. Zunächst muß er eine Prognose von Einzeldaten für jedes betrachtete Wertpapier machen und zwar in Kategorien, in denen Finanzanalytiker, seien es "Fundamentalisten" oder Analytiker im Sinne einer "technischen Analyse" ihre Prognose bisher nicht vornehmen. Die Stufe der Planungsrechnung wird dem Anleger dann durch ein Kalkülmodell der Portfolio Selection abgenommen. Als Ergebnis dieser Planungsrechnung wird dem Anleger eine Anzahl von unterschiedlich zusammengesetzten Portefeuilles vorgelegt, die zu jeder erwarteten Rendite, sie ist für jedes Portefeuille eine andere, das kleinste erwartete Risiko aufweisen. Aus diesen erwarteten Ertrag-Risikokombinationen muß der Anleger die seinen Wünschen am nächsten kommende heraussuchen, d. h. er muß sich für eine von ihnen entscheiden.

Fehler, die in einer Stufe des Entscheidungsprozesses, z.B. bei der Erfassung und Prognose der Einzeldaten vorkommen, können von den Kalkülmodellen der Portfolio Selection nicht korrigiert werden. Wenn größere Umschwünge auf dem Aktienmarkt von einem Anleger nicht erkannt werden und eine Prognose der Einzeldaten dementsprechend falsch ist, so wird die darauf beruhende Über- oder Unterschätzung der Anlagemöglichkeiten zumindest durch das Modell von MARKOWITZ abgemildert.

Schließlich ist zu bedenken, daß die Modelle bisher statischer Natur sind, inwieweit sie einmal beweglicher hinsichtlich dynamischer Ansätze werden, ist bis heute noch nicht abzusehen. Ob das Anlageergebnis "gut" oder "schlecht" ist, d. h. mit den Erwartungen übereinstimmt oder nicht übereinstimmt, hängt also nicht nur von den Modellen der Portfolio Selection ab. In diesem Sinne sollte auch gesehen werden, auf welcher Stufe eines Entscheidungsprozesses bei dem Problem der Kapitalanlage durch Modelle der Portfolio Selection Hilfestellung für den Anleger geboten werden kann.

LITERATURHINWEISE

1. Bücher:

BLEYMÜLLER, J.: Theorie und Technik der Aktienkursindizes, Wiesbaden 1966.

BLUMENTRATH, U.: Investitions- und Finanzplanung mit dem Ziel der Endwertmaximierung, Wiesbaden 1969.

CLARKSON, G.P.E.: Portfolio Selection: A Simulation of Trust Investment, New York 1962.

COHEN, K.J. und F.S. HAMMER: Analytical Methods in Banking, Homewood, Illinois 1966.

COHEN, J.B. und E.D. ZINBARG: Investment Analysis and Portfolio Management, Homewood 1967.

DIETRICH, G. und H. STAHL: Grundzüge der Matrizenrechnung, 4. Auflage, Stuttgart 1966.

DWORATSCHEK, S.: Einführung in die Datenverarbeitung, Berlin 1969.

FARNELL, W.: Wertpapieranlage in den USA, Taschenbücher für Geld, Bank und Börse Bd. 46, Frankfurt 1967.

FARRAR, D.E.: The Investment Decision Under Uncertainty, Third Printing, New York 1964.

GÄFGEN, G.: Theorie der wirtschaftlichen Entscheidung, Untersuchungen zur Logik und ökonomischen Bedeutung des rationalen Handelns, 2. durchgesehene und erweiterte Auflage, Tübingen 1968.

HEINEN, E.: Das Zielsystem der Unternehmung, Grundlage betriebswirtschaftlicher Entscheidungen, Wiesbaden 1966.

HEINEN, E.: Einführung in die Betriebswirtschaftslehre, Wiesbaden 1968.

HIELSCHER, U.: Das optimale Aktienportefeuille, Grundlagen der Kapitalanlageplanung am Aktienmarkt, 2. Auflage, Frankfurt am Main 1969.

HIELSCHER, U.: Zu den Grundlagen der optimalen Kapitalanlageplanung am Aktienmarkt, Diss. Darmstadt 1969.

KAMKE, E.: Mengenlehre, Sammlung Göschen Band 999/999a, 5. Auflage, Berlin 1965.

KOCH, H.: Betriebliche Planung, Grundlagen und Grundfragen der Unternehmenspolitik, Wiesbaden 1961.

LANZ, K.: Börsen-ABC, Wörterbuch des Wertpapiermarktes, Frankfurt am Main 1965.

LINDEN, H.J.: Bereinigte Kurse ausgewählter Börsenwerte, Darmstadt 1962.

MARKOWITZ, H.M.: Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments, Monograph 16 der COWLES-Foundation for Research in Economics at Yale University 1959, Second Printing, New York/London/Sydney 1965.

MÜLLER, H.: Portfolio Selection als Entscheidungsmodell deutscher Investmentgesellschaften, Wiesbaden 1970.

NEUHAUS, W.: Zur Planung effizienter Wertpapierportefeuilles, Diss. Köln 1968.

SCHLAIFER, R.: Introduction to Statistics for Business Decisions, New York/Toronto/London 1961.

WINZER, A.: Wie Aktien-Analysten Aktien analysieren, Methoden der Aktienbewertung, Diss. Saarbrücken 1968.

WYDLER, E.: Wertschriften - Informationssystem mit Hilfe der elektronischen Datenverarbeitung, Diss. Zürich 1968.

ZURMÜHL, R.: Matrizen und ihre technischen Anwendungen, 4. neubearbeitete Auflage, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961.

2. Aufsätze und Artikel:

ARROW, K.J.: The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-bearing, in: Review of Economic Studies, Vol. 31 1964, S. 91-96.

BAUMOL, W.J.: An Expected Gain-Confidence Limit Criterion for Portfolio Selection, in: Management Science, Vol. 10 1963, S. 174-182.

BÜSCHGEN, H.E.: Zum Problem der Planung von Wertpapierbeständen, insbesondere durch Kreditinstitute und Investmentgesellschaften, in: Kredit und Kapital, 2. Jg. 1969, S. 1-59.

BÜSCHGEN, H.E.: Wissenschaftliche Unternehmensführung und Operations Research, III, Teil, Stichwort: Optimale Aktienanlage, S. 57-61, in: BANK-BETRIEB, 10. Jg. 1970, S. 53-61.

CHAMBERS, D. und A. CHARNEAS: Inter-Temporal Analysis and Optimization of Bank Portfolios, in: Management Science, Vol. 7 1961, S. 393-410.

CHENG, P.L.: Optimum Bond Portfolio Selection, in: Management Science, Vol. 8 1962, S. 490-499.

COHEN, K.J. und E. ELTON: Inter-Temporal Portfolio Analysis Based on Simulation of Joint Returns, in: Management Science, Vol. 14 1967, S. 5-18

COHEN, K.J. und F.S. HAMMER: Linear Programming and Optimal Bank Asset Management Decisions, in: Journal of Finance, Vol. 22, No. 2 1967, S. 147-165.

COHEN, K.J. und J.A. POGUE: An Empirical Evaluation of alternative Portfolio-Selection Models, in: The Journal of Business, Vol. 40 1967, S. 166-193.

CORD, J.: A Method for Allocating Funds to Investment Projects when Returns are Subject to Uncertainty, in: Management Science, Vol. 10 1964, S. 335-341.

DORN, W.S.: Non-Linear Programming - A Survey, in: Management Science, Vol. 9 1963, S. 171-206.

EVANS, D.C.: Schaltungslogik und Speicher digitaler Rechenanlagen, in: Information, Computer und künstliche Intelligenz, mit einem Vorwort von K. Steinbuch, Frankfurt am Main 1967.

GÜNTER, H.: Unbewegliche Anlagepolitik: Der sicherste Weg zum Mißerfolg, in: Kapitalanlagen, Beilage des Handelsblatt Nr. 176 vom 12. Sept. 1967.

HASTIE, K.L.: The Determination of Optimal Investment Policy, in: Management Science, Vol. 13 1967, S. B-757-B-774.

HESTER, D.D.: Efficient Portfolios with Short Sales and Margin Holdings, in: Risk Aversion and Portfolio Choice, Monograph 19 der COWLES-Foundation for Research in Economics at Yale University 1967, New York/London/Sydney 1967, S. 41-50.

HIELSCHER, U.: Optimale Depotzusammenstellung, in: Der Volkswirt, Nr. 44, 20. Jg. 1966, S. 2163-2166.

MAO, J.C.T. und C.E. SÄRNDAL: A Decision Theory Approach to Portfolio Selection, in: Management Science, Vol. 12 1966, S. B-323-B-333.

MARKOWITZ, H.M.: Portfolio Selection, in: Journal of Finance, Vol. 7 1952, No. 1, Reprinted by Kraus Reprint Corporation, New York 1962, S. 77-91.

MARTIN jr., A.D.: Mathematical Programming of Portfolio Selections, in: Management Science, Vol. 1 1955, S. 152-166.

NEUHAUS, W.: Indexmodelle zur Planung effizienter Wertpapierportefeuilles, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Nr. 12 1969, S. 801-820.

SCHLEIF, G.: Variationen über ein Thema - Sparsysteme scheinen die Kunden anzusprechen -, in: Kapitalanlagen, Beilage des Handelsblatt Nr. 119 vom 25. Juni 1968.

SCHLEMBACH, H.: Deutsche Aktien - wieder kaufwürdig?, in: Kapitalanlagen, Beilage des Handelsblatt Nr. 65 vom 4. April 1967.

SHARPE, W.F.: A Simplified Model for Portfolio Analysis, in: Management Science, Vol. 9 1963, S. 277-293.

3. Broschüren, Programmbeschreibungen, Studienarbeiten:

Bankhaus Georg Hauck & Sohn: Börsenbericht - Effektenanalyse in Frage und Antwort, Frankfurt am Main, Oktober 1964.

IBM 7090 Program-Manual # 7090-03X, Portfolio Selection, o.V., New York 1962.

IBM 1401 Portfolio Selection Program (1401-FI-04X), Program Reference Manual, o.V., New York 1962.

IBM: Optimale Wertpapiermischungen, Programmbeschreibung, o.V., Oktober 1966, IBM Deutschland (IBM Form 8062-0).

IBM: Optimale Wertpapierbeschreibungen mit dem IBM System /360, o.V., Frankfurt 1970 (IBM Form 80578-0).

MICHAL, K.: Portfolio Selection - Das Modell von Markowitz und einige Erweiterungen -, Diplomarbeit am Institut für Statistik der Universität München 1967.

4. Laufende Veröffentlichungen:

Beiträge zur Aktienanalyse. Darmstadt: Deutsche Vereinigung für Finanzanalyse und Anlageberatung (DVFA).

Fachserie J: Geld und Kredit. Reihe 2: Aktienkurse. I. Index der Aktienkurse. Wiesbaden: Statistisches Bundesamt.

Statistisches Jahrbuch für die Bundesrepublik Deutschland. Stuttgart/Mainz: Verlag W. Kohlhammer GmbH.

Wegweiser durch deutsche Aktiengesellschaften. München: Bayerische Hypotheken- und Wechselbank.

A N H A N G

Tabelle 1*: Kurztitel der am Jahresende 1953 dem Nominalkapital nach größten deutschen Aktiengesellschaften.

Rang-Nr.	Firma[1)]	Sitz	Kurztitel
1	Farbenfabriken Bayer	Leverkusen	FABAY
2	Badische Anilin- & Sodafabrik	Ludwigshafen	BASF
3	Farbwerke Hoechst AG	Frankfurt (Main)/ Hoechst	HOEST
4	Siemens	Berlin/ München	SIEMS
5	Rheinisch-Westfälisches Elektrizitätswerk	Essen	RWE
6	August Thyssen-Hütte	Duisburg-Hamborn	ATH
7	Mannesmann	Düsseldorf	MANNS
8	Hoesch	Dortmund	HOESH
9	Daimler-Benz	Stuttgart	DAIML
10	Gelsenkirchener Bergwerks-Aktien-Gesellschaft	Essen	GBAG
11	Rheinische Stahlwerke	Essen	RHSTL
12	Allgemeine Elektricitäts-Gesellschaft AEG-Telefunken	Berlin/ Frankfurt (Main)	AEG
13	Deutsche Erdöl-Aktiengesellschaft	Hamburg	DEA
14	Klöckner-Werke	Duisburg	KLOCW
15	Hamburgische Electricitäts-Werke	Hamburg	HEW
16	Dortmund-Hörder Hüttenunion	Dortmund	DOHOE

1) Firmen entnommen aus: Wegweiser durch deutsche Aktiengesellschaften, München: Bayerische Hypotheken- und Wechselbank (Ausgabe 1967).

Tabelle 1*: Kurztitel der am Jahresende 1953 dem Nominalkapital nach größten deutschen Aktiengesellschaften (1. Fortsetzung).

Rang-Nr.	Firma	Sitz	Kurztitel
17	Kaufhof	Hannover	KAUFH
18	Continental Gummi-Werke	Hannover	CONGU
19	Hüttenwerk Oberhausen	Oberhausen	HOH
20	KARSTADT	Hamburg/ Essen	KARST
21	Berliner Kraft- und Licht (BEWAG)-Aktiengesellschaft	Berlin	BEWAG
22	Deutsche Gold- und Silber-Scheideanstalt	Frankfurt (Main)	DEGUS
23	Schering	Berlin	SCHER
24	Glanzstoff AG	Wuppertal-Elberfeld	GLSTO
25	Ilseder Hütte	Peine	ILSHU
26	Metallgesellschaft	Frankfurt (Main)	METGE
27	Wintershall	Celle/Kassel	WINHA
28	Klöckner-Humboldt-Deutz AG	Köln	KHD
29	Harpener Bergbau-Aktien-Gesellschaft	Dortmund	HARBE
30	Gutehoffnungshütte Aktienverein	Nürnberg/ Oberhausen	GHH
31	Salzdetfurth	Bad Salzdetfurth (Hannover)	SALZD
32	Bayerische Hypotheken- und Wechsel-Bank	München	BAYHY
33	Eschweiler Bergwerks-Verein	Kohlscheid (Kreis Aachen)	ESCHB

Tabelle 1*: Kurztitel der am Jahresende 1953 dem Nominalkapital nach größten deutschen Aktiengesellschaften (2. Fortsetzung).

Rang-Nr.	Firma	Sitz	Kurztitel
34	Felten & Guilleaume Carlswerk	Köln-Mülheim	FELTN
35	Demag	Duisburg	DEMAG
36	Brown, Boveri & Cie.	Mannheim	BBC
37	Rheinpreussen Aktiengesellschaft für Bergbau und Chemie	Homberg (Niederrhein)	RHPRE
38	Bayerische Motoren Werke	München	BMW
39	Vereinigte Deutsche Metallwerke	Frankfurt (Main)	VDTME
40	Bayerische Vereinsbank	München	BAYVE

Tabelle 2*: Erträge von vierzig deutschen Aktiengesellschaften für die Jahre von 1954 bis 1967. Die Erträge wurden als Faktor des Vorjahresertrages ausgedrückt.

Aktie (Kurztitel)	Jahr 1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967
FABAY	2,071	1,068	0,922	1,095	1,870	1,790	1,457	0,908	0,772	1,200	1,173	0,874	0,824	1,537
BASF	2,104	1,133	0,870	1,094	1,867	1,684	1,468	0,780	0,908	1,205	1,164	0,991	0,907	1,361
HOEST	2,038	1,046	0,920	1,053	1,965	1,747	1,611	0,791	0,884	1,147	1,194	1,006	0,921	1,353
SIEMS	1,862	1,324	0,940	1,053	1,730	1,571	1,242	1,178	0,932	1,007	1,128	1,004	0,755	1,644
RWE	1,674	1,291	0,993	1,036	1,841	2,164	1,447	1,124	0,862	1,195	0,872	0,856	0,932	1,515
ATH	2,720	1,141	1,408	1,321	1,263	2,993	0,865	0,840	0,833	1,029	1,168	0,907	0,744	1,811
MANNS	2,384	1,072	1,062	1,138	1,263	1,701	0,987	0,928	0,851	1,010	1,165	0,852	0,647	1,429
HOESH	3,298	1,252	0,910	1,007	1,140	2,027	0,993	0,849	0,688	1,105	1,326	0,866	0,643	1,857
DAIML	1,931	1,643	0,798	1,381	2,325	2,796	2,435	0,917	0,679	1,304	0,867	0,839	0,812	1,699
GBAG	2,341	1,010	0,973	1,109	1,035	1,418	1,182	1,037	0,685	1,322	1,198	0,772	0,966	1,234
RHSTL	1,956	1,189	0,616	1,336	1,634	1,794	1,031	0,873	0,810	0,946	1,126	0,803	0,599	1,619
AEG	1,774	1,442	1,070	1,108	1,813	1,533	1,020	1,101	1,033	1,147	1,109	0,964	0,696	1,543
DEA	1,593	1,135	1,084	1,055	1,609	2,231	0,825	0,992	0,771	1,090	1,134	0,650	1,955	0,976
KLOCW	2,179	1,076	0,982	0,964	1,146	1,863	1,144	0,847	0,770	1,008	1,183	0,886	0,650	1,527
HEW	1,879	1,110	1,046	0,887	1,623	1,185	1,189	0,944	0,877	1,542	0,900	0,892	1,059	1,650
DOHOE	2,252	0,983	1,026	0,974	1,125	1,800	0,884	0,855	0,745	0,774	1,364	1,080	0,628	1,879

Tabelle 2*: Erträge von vierzig deutschen Aktiengesellschaften für die Jahre von 1954 bis 1967. Die Erträge wurden als Faktor des Vorjahresertrages ausgedrückt (1. Fortsetzung).

Aktie (Kurztitel)	Jahr 1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967
KAUFH	1,768	1,526	1,062	1,246	1,983	2,210	1,917	0,974	0,767	1,004	0,992	1,134	0,766	1,557
CONGU	1,503	1,200	1,026	1,115	1,693	1,984	1,490	0,824	0,691	1,205	1,033	0,847	0,852	1,156
HOH	2,118	1,022	1,041	1,474	1,277	1,804	0,918	0,845	0,693	1,042	1,297	0,769	0,594	1,862
KARST	1,506	1,288	1,094	1,193	2,078	2,255	1,998	0,960	0,737	0,965	1,157	1,086	0,780	1,478
BEWAG	1,718	1,500	0,995	0,860	1,383	1,269	0,849	0,993	1,148	1,259	1,204	0,919	1,060	1,364
DEGUS	1,714	1,365	1,028	1,066	1,677	2,035	1,715	0,781	0,735	1,032	1,073	0,835	0,973	1,363
SCHER	2,412	0,898	1,283	1,884	1,048	1,502	0,982	1,144	0,997	1,266	1,248	0,867	0,972	1,861
GLSTO	1,356	1,198	0,926	1,005	1,800	1,964	1,457	0,725	0,936	1,319	1,056	0,873	0,694	1,064
ILSHU	1,323	1,117	1,085	1,012	1,189	1,612	0,838	0,786	0,628	0,971	1,140	0,671	0,746	1,642
METGE	2,518	1,241	1,020	1,168	1,978	2,200	1,970	0,773	0,717	1,015	1,003	0,846	0,866	1,415
WINHA	1,706	1,286	0,975	1,186	1,375	1,770	0,804	0,927	0,799	1,500	1,284	0,864	0,654	1,421
KHD	1,627	1,376	0,908	0,990	1,674	1,882	2,110	0,967	0,670	1,352	1,049	0,630	0,706	1,284
HARBE	1,599	0,870	0,815	1,257	1,061	0,838	1,097	0,929	0,710	1,295	1,037	0,821	0,782	1,940
GHH	1,857	1,067	0,977	1,151	1,803	2,005	1,522	0,843	0,632	1,253	0,794	1,000	0,833	1,478
SALZD	1,821	1,246	1,055	1,473	1,285	1,481	0,969	0,893	0,679	1,203	1,363	0,875	0,755	1,000
BAYHY	2,440	1,405	0,982	1,132	1,764	1,976	1,428	1,012	0,700	1,170	1,026	0,877	0,966	1,539
ESCHB	1,430	1,130	0,957	1,049	1,235	1,316	0,918	0,848	0,732	1,082	1,000	0,952	1,005	1,328
FELTN	1,753	1,588	0,905	1,008	1,435	1,597	1,006	0,964	0,765	1,108	0,906	0,819	0,778	1,454

Tabelle 2*: Erträge von vierzig deutschen Aktiengesellschaften für die Jahre von 1954 bis 1967. Die Erträge wurden als Faktor des Vorjahresertrages ausgedrückt (2. Fortsetzung).

Aktie (Kurztitel)	Jahr 1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967
DEMAG	1,722	1,121	0,911	1,033	1,845	1,660	1,752	0,853	0,653	1,209	0,944	0,686	0,836	1,833
BBC	1,942	1,184	1,032	1,041	1,715	1,960	1,619	0,889	0,843	1,041	0,968	1,042	0,625	1,516
RHPRE	1,691	0,965	0,935	1,050	1,186	1,535	0,864	0,893	0,618	0,950	1,263	0,775	1,156	1,635
BMW	1,887	1,130	0,655	1,158	0,965	1,935	1,500	1,386	0,950	1,228	1,098	0,788	0,914	1,754
VDTME	1,591	1,235	0,923	1,022	1,838	1,741	1,767	0,856	0,684	0,638	1,031	0,956	0,741	0,965
BAYVE	2,640	1,572	0,974	1,075	2,113	2,048	1,254	1,024	0,833	1,085	1,043	0,773	1,064	1,595

Tabelle 3*: Anwendung des Modells von MARKOWITZ auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung zum Jahresende 1964; Zeitraum von Ende 1963 bis Ende 1964.

Aktie[1] (Kurztitel)	Erwartete Rendite in %	Standard-abweichung	Korrektur-faktor
FABAY	23.13	39.19	1.00
BASF	22.32	37.62	1.00
HOEST	24.04	42.31	1.00
SIEMS	21.97	28.08	1.00
RWE	32.92	42.54	1.00
ATH	29.92	67.06	1.00
MANN	11.24	25.06	1.00
HOESF	10.79	36.28	1.00
DAIM	58.58	77.06	1.00
CHEC	8.57	21.21	1.00
RHSTL	13.66	39.00	1.00
AEG	25.15	27.82	1.00
DEA	19.91	45.40	1.00
KLOCW	8.89	31.61	1.00
HEW	15.59	26.89	1.00
DEMAG	1.84	31.72	1.00
KAUFH	40.99	51.90	1.00
CONCO	24.76	41.22	1.00
HOH	12.40	34.25	1.00
KARST	39.64	56.12	1.00
PEWAG	13.96	23.06	1.00
DEGUS	27.04	45.28	1.00
SCHER	22.27	31.06	1.00
GUSTF	25.80	41.85	1.00
ILSHL	2.64	28.20	1.00
METCH	34.24	55.91	1.00
WINFA	16.02	33.40	1.00
KHD	32.54	48.67	1.00
FARBE	-1.42	20.34	1.00
GHH	25.03	44.93	1.00
SALZD	14.27	26.77	1.00
BAYER	26.54	40.11	1.00
ESCHE	2.97	18.60	1.00
FELTN	15.29	30.79	1.00
DEMAG	22.63	42.77	1.00
BBC	25.82	40.17	1.00
KHPKE	-0.04	25.18	1.00
BMW	21.19	36.84	1.00
VOTAE	16.93	47.83	1.00
BAYVE	33.09	47.24	1.00

1) Vgl. Tabelle 1*: Kurztitel der am Jahresende 1953 dem Nominalkapital nach größten deutschen Aktiengesellschaften S. 2*ff.

Tabelle 4*: Anwendung des Modells von MARKOWITZ auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung zum Jahresende 1964.

Zeitraum von Ende 1963 bis Ende 1964, 40 Aktien vgl. S. 8*.										
Eckportefeuille Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zusammensetzung	%									
DAIML	100,00	54,32	17,26	15,48						
SCHER		48,68	44,07	43,78	41,08	41,00	40,13	39,58	38,45	33,18
AEG			38,67	31,88	29,94	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
BEWAG				8,86	12,43	44,00	47,15	47,38	46,67	47,69
KHD					16,55	15,00	12,72	11,14	8,95	7,14
HEW								1,90	4,30	0,00
BMW									1,63	2,57
HARBE										9,42
Erwartete Rendite	58,98	42,21	29,73	28,15	23,81	20,15	19,66	19,35	19,00	16,78
Standardabweichung	77,06	44,47	25,20	23,23	18,09	14,52	14,20	14,05	13,91	13,13
Erwartete Rendite +1 Standardabweichung	136,04	86,68	54,93	51,38	41,90	34,67	33,86	33,40	32,91	29,91
Erwartete Rendite -1 Standardabweichung	-18,09	-2,26	4,53	4,91	5,72	5,63	5,45	5,30	5,09	3,64

Tabelle 4*: Anwendung des Modells von MARKOWITZ auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung zum Jahresende 1964 (1. Fortsetzung).

Zeitraum von Ende 1963 bis Ende 1964, 40 Aktien vgl. S. 8*.					
Eckportefeuille Nr.	11	12	13	14	15
Zusammensetzung	%				
SIEMS	0,00	0,09			
BEWAG	47,17	47,08	47,10	45,64	42,29
SCHER	30,79	30,59	30,54	26,43	18,01
KHD	5,57	5,40	5,33	0,00	0,00
HARBE	12,87	13,16	13,22	18,63	32,77
BMW	3,60	3,68	3,72	5,88	4,62
VDTME			0,09	3,42	2,31
Erwartete Rendite	15,83	15,75	15,72	13,88	10,86
Standardabweichung	12,84	12,82	12,81	12,31	11,92
Erwartete Rendite + 1 Standardabweichung	28,67	28,57	28,54	26,19	22,78
Erwartete Rendite - 1 Standardabweichung	2,99	2,93	2,91	1,57	-1,05

Tabelle 5*: Anwendung des Modells von MARKOWITZ auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung zum Jahresende 1963; Zeitraum von Ende 1962 bis Ende 1963.

Aktie[1] (Kurztitel)	Erwartete Rendite in %	Standard-abweichung	Korrektur-faktor
FAGAY	35.94	50.11	1.00
BASF	34.14	47.77	1.00
HOEST	38.96	52.95	1.00
SIEMS	33.06	31.91	1.00
RWE	48.96	52.45	1.00
ATH	35.86	93.13	1.00
MANNS	14.60	34.70	1.00
HOESH	13.94	52.38	1.00
DAIML	83.04	96.21	1.00
GEAG	7.14	26.65	1.00
RHSTL	22.84	45.41	1.00
ALC	30.00	35.59	1.00
DEA	28.56	62.46	1.00
KLOCK	15.40	43.14	1.00
FEW	16.36	29.26	1.00
DOHCE	8.18	42.48	1.00
KAUFF	57.02	65.20	1.00
CONGU	33.04	55.88	1.00
HOH	10.74	44.45	1.00
KARST	60.56	70.18	1.00
BLWAG	12.84	21.29	1.00
DEGLS	38.86	59.24	1.00
SCHLR	13.46	21.49	1.00
GLSTO	37.64	53.61	1.00
ILSHU	1.06	39.37	1.00
MITCL	52.76	72.06	1.00
WINHA	13.50	42.62	1.00
KHD	46.06	61.51	1.00
HAREE	-7.30	15.96	1.00
GHH	36.10	59.91	1.00
SALZD	6.14	31.98	1.00
BAYHY	37.60	52.51	1.00
ESCHB	0.98	25.31	1.00
FELTA	15.34	34.80	1.00
DEMAG	35.26	55.58	1.00
BBC	40.52	50.79	1.00
RHPFE	1.92	35.17	1.00
BMW	34.72	41.06	1.00
VDTME	37.72	55.87	1.00
BAYVE	45.44	59.11	1.00

1) Vgl. Tabelle 1*: Kurztitel der am Jahresende 1953 dem Nominalkapital nach größten deutschen Aktiengesellschaften S. 2*ff.

Tabelle 6*: Anwendung des Modells von MARKOWITZ auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung zum Jahresende 1963.

Zeitraum von Ende 1962 bis Ende 1963, 40 Aktien vgl. S. 11*.										
Eckportefeuille Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zusammensetzung	%									
DAIML	100,00	78,46	31,42	2,74						
BMW		21,54	36,97	36,00	36,42	36,05	32,95	34,74	33,43	26,70
AEG			31,61	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
SIEMS				61,26	63,58	63,95	21,25	0,00	0,00	0,00
BEWAG							45,80	49,28	51,12	53,53
HEW								15,98	15,45	0,00
HARBE										19,77
Erwartete Rendite	83,04	72,63	48,41	35,03	33,66*	33,66*	24,35	21,00	20,70	14,70
Standardabweichung	96,21	80,81	46,73	29,56	27,98	27,97	20,00	17,72	17,53	14,00
Erwartete Rendite + 1 Standardabweichung	179,25	153,44	95,14	64,59	61,64	61,63	44,34	38,73	38,23	28,70
Erwartete Rendite - 1 Standardabweichung	-13,17	-8,18	1,68	5,46	5,68	5,69	4,35	3,28	3,17	0,70

* gerundete Werte

Tabelle 6*: Anwendung des Modells von MARKOWITZ auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung zum Jahresende 1963 (1. Fortsetzung).

Zeitraum von Ende 1962 bis Ende 1963, 40 Aktien vgl. S. 11*.			
Eckportefeuille Nr.	11	12	13
Zusammensetzung	%		
BEWAG	42,07	23,82	20,97
HARBE	42,98	48,48	54,07
BMW	14,95	0,00	0,00
SCHER		27,70	24,96
Erwartete Rendite	7,75	3,25	2,11
Standardabweichung	10,87	9,94	9,83
Erwartete Rendite + 1 Standardabweichung	18,32	13,19	11,93
Erwartete Rendite - 1 Standardabweichung	-3,41	-6,70	-7,72

Tabelle 7*: Anwendung des Modells von MARKOWITZ auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung zum Jahresende 1966; Zeitraum von Ende 1965 bis Ende 1966.

Aktie[1] (Kurztitel)	Erwartete Rendite in %	Standard-abweichung	Korrektur-faktor
[illegible]	-1.40	19.05	1.00
[illegible]	0.33	17.71	1.00
[illegible]ST	0.44	17.05	1.00
[illegible]	4.[illegible]	10.04	1.00
[illegible]	-1.62	16.65	1.00
ATI[illegible]	-4.46	14.25	1.00
[illegible]	-3.3[illegible]	13.14	1.00
[illegible]SH	-3.32	24.93	1.00
[illegible]ML	-7.83	23.13	1.00
GBAC	0.23	27.16	1.00
[illegible]STL	-8.94	13.30	1.00
[illegible]	7.08	7.25	1.00
[illegible]	-7.26	20.90	1.00
KL[illegible]	-6.12	15.13	1.00
[illegible]	3.10	28.67	1.00
[illegible]	-3.64	25.95	1.00
KALEH	-2.53	13.20	1.00
[illegible]NGU	-8.00	20.06	1.00
[illegible]	-7.03	24.32	1.00
[illegible]ST	-1.90	15.99	1.00
[illegible]	10.[illegible]	14.36	1.00
[illegible]	-10.[illegible]	15.21	1.00
[illegible]	10.44	17.04	1.00
[illegible]STL	-1.82	22.31	1.00
[illegible]	-10.03	21.42	1.00
[illegible]	-12.32	13.43	1.00
[illegible]	7.46	30.29	1.00
KHD	-5.64	29.63	1.00
[illegible]	-4.10	22.41	1.00
GHH	-5.56	23.50	1.00
[illegible]	0.25	27.53	1.00
[illegible]	-4.30	17.72	1.00
[illegible]	-7.72	13.62	1.00
[illegible]	-8.75	13.35	1.00
[illegible]	-13.10	22.45	1.00
[illegible]	-4.3[illegible]	[illegible]	1.00
[illegible]	-10.92	23.95	1.00
[illegible]	5.00	23.32	1.00
[illegible]	-16.70	16.96	1.00
[illegible]	-4.04	13.91	1.00

1) Vgl. Tabelle 1*: Kurztitel der am Jahresende 1953 dem Nominalkapital nach größten deutschen Aktiengesellschaften S. 2*ff.

Tabelle 8*: Anwendung des Modells von MARKOWITZ auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung zum Jahresende 1966.

Zeitraum von Ende 1965 bis Ende 1966, 40 Aktien vgl. S. 14*.										
Eckportefeuille Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zusammensetzung	%									
BEWAG	100,00	84,29	91,26	90,11	75,88	63,24	14,07	2,20	0,36	0,46
SCHER		15,71	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
BMW			8,74	9,89	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
SIEMS					24,12	36,76	19,44	3,03	0,00	0,00
AEG							66,49	74,91	79,28	78,87
KAUFH								19,86	19,21	19,09
VDTME									1,15	1,58
Erwartete Rendite	10,46*	10,46*	10,33	10,32	9,14	8,45	7,15	5,17	4,96	4,87
Standardabweichung	14,36	14,24	13,84	13,79	10,76	9,21	7,24	5,97	5,91	5,88
Erwartete Rendite + 1 Standardabweichung	24,82	24,70	24,17	24,11	19,89	17,65	14,38	11,14	10,87	10,76
Erwartete Rendite - 1 Standardabweichung	-3,90	-3,79	-3,51	-3,48	-1,62	-0,76	-0,09	-0,80	-0,95	-1,01

* gerundete Werte

Tabelle 9*: Anwendung des Modells von SHARPE auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung über den Aktienindex des Statistischen Bundesamtes zum Jahresende 1963; Zeitraum von Ende 1962 bis Ende 1963.

Aktie[1] (Kurztitel)	Erwartete Rendite in %	Standardabweichung einzel	Standardabweichung gesamt	Relation zum Index Steigung	Relation zum Index Abschnitt	Tageskurs
FABAY	17,43	17,04	20,96	0,3815	-0,2072	469,50
BASF	12,80	17,36	33,05	0,8789	-0,7509	441,50
HOEST	12,18	15,98	27,92	0,7156	-0,5938	438,00
SIEMS	-1,62	2,40	13,13	0,4034	-0,4196	555,00
RWE	-0,39	9,64	12,46	0,2467	-0,2506	605,00
ATH	-4,18	11,14	33,82	0,9978	-1,0396	179,50
MANNS	-12,51	19,37	41,77	1,1564	-1,2815	206,50
HOESH	5,31	5,43	16,50	0,4867	-0,4336	138,00
DAIML	-12,10	10,52	22,54	0,6231	-0,7441	1030,00
GBAG	1,45	10,26	26,31	0,7571	-0,7426	138,00
RHSTL	-4,89	8,89	19,17	0,5307	-0,5796	225,00
AEG	2,05	5,12	16,62	0,4940	-0,4735	423,00
DEA	-3,03	11,11	25,68	0,7236	-0,7539	165,00
KLOCW	2,86	10,58	23,72	0,6633	-0,6347	157,50
HEW	-1,75	12,28	32,57	0,9426	-0,9601	190,00
DOHOE	-10,10	11,78	26,85	0,7538	-0,8548	99,00
KAUFH	-3,77	10,78	17,71	0,4390	-0,4767	850,00
CONGU	-10,92	7,85	14,57	-0,3835	0,2743	467,00
HOH	-5,04	5,99	18,20	0,5369	-0,5873	139,00
KARST	0,37	6,13	18,62	0,5494	-0,5457	815,00
BEWAG	8,63	9,58	27,65	0,8106	-0,7243	156,50
DEGUS	0,30	6,26	22,44	0,6733	-0,6703	665,00
SCHER	-0,62	4,46	18,43	0,5587	-0,5649	374,00
GLSTO	17,87	3,19	25,60	0,7939	-0,6152	470,00
ILSHU	11,33	12,13	43,46	1,3041	-1,1908	103,00
METGE	2,13	6,87	14,82	0,4104	-0,3891	800,00
WINHA	8,09	5,51	8,93	0,2195	-0,1386	272,00
KHD	4,70	4,21	12,78	0,3771	-0,3301	475,00
HARBE	11,11	3,79	32,78	1,0176	-0,9065	66,00
GHH	14,31	5,33	21,39	0,6474	-0,5043	438,00
SALZD	3,87	10,52	18,88	0,4899	-0,4512	198,00
BAYHY	12,03	9,86	29,93	0,8832	-0,7629	507,00
ESCHB	0,00	11,76	35,71	1,0535	-1,0535	85,00
FELTN	13,33	5,33	12,64	0,3582	-0,2249	250,00
DEMAG	2,81	10,20	25,30	0,7234	-0,6953	392,00
BBC	5,51	5,39	17,92	0,5340	-0,4789	587,00
RHPRE	8,33	11,67	39,95	1,1940	-1,1107	100,00
BMW	8,33	3,12	25,56	0,7929	-0,7096	320,00
VDTME	-15,77	22,97	62,46	1,8152	-1,9729	370,00
BAYVE	11,31	3,62	28,49	0,8832	-0,7701	507,00

1) Vgl. Tabelle 1*: Kurztitel der am Jahresende 1953 dem Nominalkapital nach größten deutschen Aktiengesellschaften S. 2*ff.

Tabelle 10*: Anwendung des Modells von SHARPE auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung über den Aktienindex des Statistischen Bundesamtes zum Jahresende 1963.

Zeitraum von Ende 1962 bis Ende 1963, 40 Aktien vgl. S. 16*.										
Portefeuille Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zusemmensetzung	%									
FABAY	0,00	68,03	63,12	54,52	48,73	40,75	24,16	22,86	19,00	18,92
CONGU	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,17
GLSTO	100,00	31,96	23,85	9,60	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
WINHA	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	5,10	20,24	20,30
FELTN	0,00	0,00	13,03	35,88	51,27	59,24	75,84	72,04	60,77	60,61
Erwartete Rendite	17,83*	17,57*	17,00	16,00	15,33*	15,00	14,32*	14,00	13,05*	13,00
Standardabweichung	25,46	20,13	18,70	16,26	14,71	14,02	12,99	12,65	11,70	11,65
Erwartete Rendite + 1 Standardabweichung	43,29	37,70	35,70	32,26	30,04	29,02	27,31	26,65	24,75	24,65
Erwartete Rendite - 1 Standardabweichung	-7,63	-2,56	-1,70	-0,26	0,62	0,98	1,33	1,35	1,35	1,35

* Wertpapiermischung am kritischen Punkt (Eckportefeuille)

Tabelle 10*: Anwendung des Modells von SHARPE auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung über den Aktienindex des Statistischen Bundesamtes zum Jahresende 1963 (1. Fortsetzung).

Zeitraum von Ende 1962 bis Ende 1963, 40 Aktien vgl. S. 16*.										
Portefeuille Nr.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Zusammensetzung	%									
FABAY	17,38	15,84	14,30	12,76	11,22	9,67	8,13	6,59	5,05	3,75
CONGU	3,77	7,36	10,95	14,55	18,14	21,74	25,33	28,92	32,52	35,54
WINHA	21,54	22,79	24,04	25,28	26,53	27,78	29,02	30,27	31,52	32,57
FELTN	57,31	54,01	50,71	47,41	44,11	40,81	37,51	34,21	30,91	28,13
Erwartete Rendite	12,00	11,00	10,00	9,00	8,00	7,00	6,00	5,00	4,00	3,16*
Standardabweichung	10,70	9,76	8,84	7,94	7,08	6,26	5,50	4,84	4,32	4,03
Erwartete Rendite + 1 Standardabweichung	22,70	20,76	18,84	16,94	15,08	13,26	11,50	9,84	8,32	7,19
Erwartete Rendite - 1 Standardabweichung	1,30	1,24	1,16	1,06	0,92	0,74	0,50	0,16	-0,32	-0,87

* Wertpapiermischung am kritischen Punkt (Eckportefeuille)

Tabelle 10*: Anwendung des Modells von SHARPE auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung über den Aktienindex des Statistischen Bundesamtes zum Jahresende 1963 (2. Fortsetzung).

Zeitraum von Ende 1962 bis Ende 1963, 40 Aktien vgl. S. 16*.						
Portefeuille Nr.)	21	22	23	24	25	26
Zusammensetzung	%					
FABAY	3,59	3,31	2,64	1,80	1,51	0,50
SIEMS	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	13,75
RWE	0,78	2,11	3,52	5,28	5,75	6,04
CONGU	35,77	36,15	37,09	38,27	38,71	40,54
METGE	0,00	0,00	0,00	0,00	1,05	1,22
WINHA	32,37	32,02	29,78	26,98	25,92	21,23
KHD	0,00	0,00	4,64	10,45	11,72	9,03
FELTN	27,49	26,41	22,33	17,22	15,34	7,68
Erwartete Rendite	3,00	2,73*	2,00	1,08*	0,73*	-1,39*
Standardabweichung	3,99	3,94	3,81	3,71	3,69	3,63
Erwartete Rendite + 1 Standardabweichung	6,99	6,67	5,81	4,79	4,42	2,24
Erwartete Rendite - 1 Standardabweichung	-0,99	-1,21	-1,81	-2,63	-2,96	-5,02

* Wertpapiermischung am kritischen Punkt

Tabelle 11*: Anwendung des Modells von SHARPE auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung über den Aktienindex des Statistischen Bundes-Amtes zum Jahresende 1966; Zeitraum von Ende 1965 bis Ende 1966.

Aktie[1] (Kurztitel)	Erwartete Rendite in %	Standardabweichung einzel	Standardabweichung gesamt	Relation zum Index Steigung	Relation zum Index Abschnitt	Tageskurs
FABAY	13,01	6,51	25,37	1,7816	-1,6515	333,00
BASF	3,88	13,56	20,31	1,0982	-1,0594	430,00
HOEST	7,00	10,63	24,39	1,5944	-1,5244	486,00
SIEMS	8,27	6,77	21,10	1,4519	-1,3692	492,00
RWE	15,92	15,29	28,39	1,7378	-1,5786	425,00
ATH	8,33	7,11	17,75	1,1812	-1,0979	164,00
MANNS	15,61	4,82	10,77	0,6999	-0,5438	173,00
HOESH	12,64	4,60	10,28	0,6680	-0,5416	145,00
DAIML	15,60	11,67	25,20	1,6224	-1,4664	500,00
GBAG	6,94	8,95	16,13	0,9751	-0,9057	149,00
RHSTL	18,01	9,32	19,00	1,2032	-1,0231	161,00
AEG	10,21	10,13	19,70	1,2271	-1,1250	444,00
DEA	22,52	15,01	28,33	1,7452	-1,5200	111,00
KLOCW	7,35	7,35	19,80	1,3354	-1,2619	136,00
HEW	6,27	11,65	18,47	1,0415	-0,9788	186,00
DOHOE	16,99	9,80	17,67	1,0683	-0,8984	102,00
KAUFH	21,81	12,46	21,95	1,8126	-1,0945	535,00
CONGU	8,41	8,26	22,58	1,5271	-1,4430	444,00
HOH	7,11	16,74	27,89	1,6211	-1,5500	119,50
KARST	5,56	12,92	36,79	2,5029	-2,4473	774,00
BEWAG	-1,43	8,59	8,59	0,0000	-0,0143	174,50
DEGUS	12,75	7,62	11,28	0,6041	-0,4766	481,00
SCHER	42,03	28,31	32,20	3,1863	-2,7660	418,00
GLSTO	21,56	20,00	24,67	1,0493	-0,8337	450,00
ILSHU	-12,85	13,07	23,56	1,4244	-1,5529	76,50
METGE	17,03	27,78	30,44	0,9053	-0,7350	642,00
WINHA	13,69	4,50	16,40	1,1453	-1,0084	370,00
KHD	60,86	17,33	51,91	3,5546	-2,9460	327,00
HARBE	9,38	7,81	17,47	1,1350	-1,0412	64,00
GHH	10,42	4,17	33,59	2,4216	-2,3174	400,00
SALZD	26,80	10,20	13,96	0,6919	-0,4239	245,00
BAYHY	-10,40	22,78	27,81	1,1584	-1,2624	439,00
ESCHB	39,27	28,54	32,17	1,0781	-0,6854	73,00
FELTN	5,56	9,26	18,26	1,1435	-1,0879	180,00
DEMAG	14,60	18,25	27,13	1,4582	-1,3122	274,00
BBC	-2,55	4,91	20,25	1,4272	-1,4527	509,00
RHPRE	-11,65	2,01	18,18	1,3128	-1,4293	83,00
BMW	41,38	13,75	25,24	1,5375	-1,1237	315,00
VDTME	29,33	9,61	16,03	0,9314	-0,6381	208,00
BAYVE	9,17	9,70	15,36	0,8648	-0,7731	378,00

1) Vgl. Tabelle 1*: Kurztitel der am Jahresende 1953 dem Nominalkapital nach größten deutschen Aktiengesellschaften S. 2*ff.

Tabelle 12*: Anwendung des Modells von SHARPE auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung über den Aktienindex des Statistischen Bundesamtes zum Jahresende 1966.

Zeitraum von Ende 1965 bis Ende 1966, 40 Aktien vgl. S. 20*.										
Portefeuille Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zusammensetzung	%									
KHD	100,00	96,04	91,38	86,73	85,48	81,80	76,74	71,69	66,63	61,58
ESCHB	0,00	3,93	8,59	13,25	14,49	15,03	15,76	16,48	17,21	17,94
BMW	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3,19	7,51	11,84	16,17	20,49
Erwartete Rendite	60,84*	60,00	59,00	58,00	57,73*	57,00	56,00	55,00	54,00	53,00
Standardabweichung	51,91	50,43	48,71	47,04	46,60	45,41	43,80	42,20	40,63	39,07
Erwartete Rendite + 1 Standardabweichung	112,75	110,43	107,71	105,04	104,33	102,41	99,80	97,20	94,63	92,07
Erwartete Rendite - 1 Standardabweichung	8,93	9,57	10,29	10,96	11,13	11,59	12,20	12,80	13,37	13,93

* Wertpapiermischung am kritischen Punkt (Eckportefeuille)

Tabelle 12*: Anwendung des Modells von SHARPE auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung über den Aktienindex des Statistischen Bundesamtes zum Jahresende 1966 (1. Fortsetzung).

Zeitraum von Ende 1965 bis Ende 1966, 40 Aktien vgl. S. 20*.										
Portefeuille Nr.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Zusammensetzung	%									
KHD	56,53	51,47	46,42	41,37	36,31	31,26	26,21	21,15	16,10	11,04
ESCHB	18,66	19,39	20,12	20,84	21,57	22,29	23,02	23,75	24,47	25,20
BMW	24,82	29,15	33,47	37,80	42,13	46,45	50,78	55,11	59,43	63,76
Erwartete Rendite	52,00	51,00	50,00	49,00	48,00	47,00	46,00	45,00	44,00	43,00
Standardabweichung	37,53	36,03	34,54	33,10	31,69	30,32	28,99	27,73	26,52	25,39
Erwartete Rendite + 1 Standardabweichung	89,53	87,03	84,54	82,10	79,69	77,32	74,99	72,73	70,52	68,39
Erwartete Rendite - 1 Standardabweichung	14,47	14,97	15,46	15,90	16,31	16,68	17,01	17,27	17,48	17,61

Tabelle 12*: Anwendung des Modells von SHARPE auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung über den Aktienindex des Statistischen Bundesamtes zum Jahresende 1966 (2. Fortsetzung).

Zeitraum von Ende 1965 bis Ende 1966, 40 Aktien vgl. S. 20*.										
Portefeuille Nr.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Zusammensetzung	%									
KHD	8,36	7,59	6,14	5,96	4,37	2,79	1,20	0,00	0,00	0,00
SALZD	0,00	2,25	6,48	6,78	9,42	12,05	14,69	16,68	17,79	22,35
ESCHB	25,59	25,16	24,37	24,25	23,23	22,21	21,19	20,42	20,05	18,54
BMW	66,06	65,00	63,02	62,69	59,93	57,17	54,41	52,32	50,85	44,76
VDTME	0,00	0,00	0,00	0,32	3,05	5,78	8,50	10,57	11,31	14,35
Erwartete Rendite	42,47*	42,00	41,12*	41,00	40,00	39,00	38,00	37,24*	37,00	36,00
Standardabweichung	24,82	24,33	23,42	23,30	22,27	21,26	20,25	19,50	19,27	18,31
Erwartete Rendite +1 Standardabweichung	67,29	66,33	64,54	64,30	62,27	60,26	58,25	56,74	56,27	54,31
Erwartete Rendite -1 Standardabweichung	17,65	17,67	17,70	17,70	17,73	17,74	17,75	17,74	17,73	17,69

* Wertpapiermischung am kritischen Punkt (Eckportefeuille)

Tabelle 12*: Anwendung des Modells von SHARPE auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung über den Aktienindex des Statistischen Bundesamtes zum Jahresende 1966 (3. Fortsetzung).

Zeitraum von Ende 1965 bis Ende 1966, 40 Aktien vgl. S. 20*.										
Portefeuille Nr.	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Zusammensetzung	%									
BEWAG	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,69	3,79	6,89
SALZD	26,92	31,49	36,05	40,62	45,19	49,76	53,30	52,98	51,56	50,14
ESCHB	17,02	15,50	13,98	12,46	10,94	9,42	8,25	8,17	7,84	7,51
BMW	38,67	32,59	26,50	20,41	14,32	8,24	3,51	3,42	3,00	2,59
VDTME	17,39	20,43	23,47	26,50	29,54	32,58	34,94	34,73	33,81	32,88
Erwartete Rendite	35,00	34,00	33,00	32,00	31,00	30,00	29,22*	29,00	28,00	27,00
Standardabweichung	17,40	16,53	15,73	14,99	14,33	13,76	13,39	13,30	12,86	12,44
Erwartete Rendite + 1 Standardabweichung	52,40	50,53	48,73	46,99	45,33	43,76	42,61	42,30	40,86	39,44
Erwartete Rendite - 1 Standardabweichung	17,60	17,47	17,27	17,01	16,67	16,24	15,83	15,70	15,14	14,56

* Wertpapiermischung am kritischen Punkt (Eckportefeuille)

Tabelle 12*: Anwendung des Modells von SHARPE auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung über den Aktienindex des Statistischen Bundesamtes zum Jahresende 1966 (4. Fortsetzung).

Zeitraum von Ende 1965 bis Ende 1966, 40 Aktien vgl. S. 20*.										
Portefeuille Nr.	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Zusammensetzung	%									
MANNS	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,96	1,40	2,96
BEWAG	9,99	13,08	16,18	19,28	22,36	22,37	22,84	23,56	24,13	26,14
DEGUS	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,45	1,00	1,31	2,41
SALZD	48,72	47,30	45,88	44,46	43,05	43,05	42,65	41,74	41,11	38,94
ESCHB	7,18	6,84	6,51	6,18	5,85	5,85	5,77	5,59	5,46	5,02
BMW	2,17	1,75	1,34	0,92	0,51	0,50	0,37	0,00	0,00	0,00
VDTME	31,95	31,02	30,09	29,16	28,24	28,23	27,93	27,16	26,58	24,54
Erwartete Rendite	26,00	25,00	24,00	23,00	22,01*	22,00	21,77*	21,29*	21,00	20,00
Standardabweichung	12,02	11,61	11,20	10,81	10,43	10,43	10,34	10,16	10,05	9,69
Erwartete Rendite + 1 Standardabweichung	38,02	36,61	35,20	33,81	32,44	32,43	32,11	31,45	31,05	29,69
Erwartete Rendite - 1 Standardabweichung	13,98	13,39	12,80	12,19	11,58	11,57	11,43	11,13	10,95	10,31

* Wertpapiermischung am kritischen Punkt (Eckportefeuille)

Tabelle 12*: Anwendung des Modells von SHARPE auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung über den Aktienindex des Statistischen Bundesamtes zum Jahresende 1966 (5. Fortsetzung).

Zeitraum von Ende 1965 bis Ende 1966, 40 Aktien vgl. S. 20*.										
Portefeuille Nr.	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Zusammensetzung	%									
MANNS	4,51	6,06	7,61	9,16	10,71	12,26	13,25	13,31	13,49	13,68
HOESH	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,94	3,53	6,12
BEWAG	28,14	30,15	32,15	34,16	36,17	38,17	39,45	40,00	41,53	43,06
DEGUS	3,50	4,59	5,69	6,78	7,88	8,97	9,67	9,86	10,38	10,89
SALZD	36,77	34,59	32,42	30,24	28,07	25,90	24,51	23,71	21,49	19,27
ESCHB	4,58	4,14	3,70	3,26	2,82	2,38	2,10	1,94	1,51	1,07
VDTME	22,50	20,47	18,43	16,39	14,36	12,32	11,02	10,24	8,08	5,92
Erwartete Rendite	19,00	18,00	17,00	16,00	15,00	14,00	13,36*	13,00	12,00	11,00
Standardabweichung	9,33	8,99	8,66	8,35	8,05	7,77	7,61	7,52	7,28	7,06
Erwartete Rendite + 1 Standardabweichung	28,33	26,99	25,66	24,35	23,05	21,77	20,97	20,52	19,28	18,06
Erwartete Rendite - 1 Standardabweichung	9,67	9,01	8,34	7,65	6,95	6,23	5,75	5,48	4,72	3,94

* Wertpapiermischung am kritischen Punkt (Eckportefeuille)

Tabelle 12*: Anwendung des Modells von SHARPE auf den Aktienmarkt der Bundesrepublik Deutschland. Retrospektiv durchgeführte Schätzung über den Aktienindex des Statistischen Bundesamtes zum Jahresende 1966 (6. Fortsetzung).

Zeitraum von Ende 1965 bis Ende 1966, 40 Aktien vgl. S. 20*.					
Portefeuille Nr.	61	62	63	64	65
Zusammensetzung	%				
MANNS	13,86	14,04	14,12	14,12	9,75
HOESH	8,70	11,29	12,48	13,12	19,04
BEWAG	44,59	46,12	46,82	47,26	55,58
DEGUS	11,41	11,93	12,17	12,29	13,03
SALZD	17,05	14,83	13,81	13,20	2,60
ESCHB	0,64	0,20	0,00	0,00	0,00
VDTME	3,76	1,59	0,60	0,00	0,00
Erwartete Rendite	10,00	9,00	8,54*	8,29*	5,49*
Standardabweichung	6,87	6,70	6,63	6,59	6,40
Erwartete Rendite + 1 Standardabweichung	16,87	15,70	15,17	14,88	11,89
Erwartete Rendite - 1 Standardabweichung	3,13	2,30	1,91	1,70	-0,91

* Wertpapiermischung am kritischen Punkt (Eckportefeuille)

Tabelle 13*: FORTRAN-IV-Programm zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ.

```
C
C
C       STEUERPROGRAMM                                                  PESL0030
        COMMON /NEXT/ NEUDAT                                            PESL0040
        LOGICAL ENDE                                                    PESL0050
        INTEGER OPTION                                                  PESL0060
      1 READ(5,100,END=9,ERR=10) ENDE,OPTION                            PESL0070
    100 FORMAT(L1,I1)                                                   PESL0080
        NEUDAT=1                                                        PESL0090
        IF(ENDE) STOP                                                   PESL0100
        CALL MKWMOD                                                     PESL0110
        IF(NEUDAT.EQ.9999) GO TO 1                                      PESL0120
        CALL STEP1                                                      PESL0130
        CALL STEP2                                                      PESL0140
        GO TO 1                                                         PESL0150
     10 IF(NEUDAT.NE.9999) WRITE(6,11)                                  PESL0160
     11 FORMAT('-FEHLER IN DER ERSTEN ODER LETZTEN KARTE DES DATENSATZES')PESL0170
        GO TO 1                                                         PESL0180
      9 STOP 1                                                          PESL0190
        END                                                             PESL0200



        SUBROUTINE MKWMOD                                               PESL0210
C
C
        COMMON /NEXT/ NEUDAT                                            PESL0220
        COMMON /AKTIE/ NAMEN                                            PESL0230
        COMMON /HUB/ COV                                                PESL0240
        COMMON /LADEN/ MUE,WUNSCH,ANZAHL                                PESL0250
        REAL*8 NAMEN(50)                                                PESL0260
        REAL X(14,40),YM(41),COV(40,40),SIGMA(40),SU,ZS,VERHER(40),MUE(41)PESL0270
       *,S(41)                                                          PESL0280
        INTEGER MTAPE,WUNSCH,ANZAHL,NENNER                              PESL0290
        INTEGER*2 TITEL(40)                                             PESL0300
        EQUIVALENCE (NAMEN(41),TITEL(1)),(YM(1),MUE(1))                 PESL0310
        EQUIVALENCE (MUE(1),S(1))                                       PESL0320
        READ(5,101) (TITEL(I),I=1,40)                                   PESL0330
    101 FORMAT(40A2)                                                    PESL0340
        WRITE(6,989) (TITEL(I),I=1,40)                                  PESL0350
    989 FORMAT('1',40A2//)                                              PESL0360
        WRITE(6,985)                                                    PESL0370
    985 FORMAT(' ANGEWANDT WIRD DAS MODELL VON MARKOWITZ'//)            PESL0380
        READ(5,100,ERR=444)  ANZAHL,NENNER,MTAPE,WUNSCH                 PESL0390
    100 FORMAT(4I2)                                                     PESL0400
        IF(MTAPE.EQ.0) MTAPE=5                                          PESL0410
        DO 333 J=1,40                                                   PESL0420
        DO 333 I=1,40                                                   PESL0430
    333 COV(I,J)=0.0                                                    PESL0440
```

Tabelle 13°: FORTRAN-IV-Programm zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ (1. Fortsetzung).

```
      DO 99 M=1,ANZAHL                                                  PFSL0450
      READ(MTAPE,600,ERR=688) NAMEN(M),VERBEK(M)                        PFSL0460
  600 FORMAT(20X,A8,12X,F5.3)                                           PFSL0470
      IF(VERBEK(M).EQ.0.0) VERBEK(M)=1.0                                PFSL0480
      READ(MTAPE,200,ERR=677)(X(N,M),N=1,NENNER)                        PFSL0490
  200 FORMAT(4E20.8)                                                    PFSL0500
      ZS=0.0                                                            PFSL0510
      DO 80 N=1,NENNER                                                  PFSL0520
   80 ZS=ZS+X(N,M)                                                      PFSL0530
      YM(M)=ZS/NENNER                                                   PFSL0540
      YM(M)=YM(M)*VERBEK(M)                                             PFSL0550
      DO 92 MA=1,M                                                      PFSL0560
      SU=0.0                                                            PFSL0570
      DO 93 J=1,NENNER                                                  PFSL0580
   93 SU=SU+(X(J,M)-YM(M))*(X(J,MA)-YM(MA))                             PFSL0590
      COV(MA,M)=SU/(NENNER-1)                                           PFSL0600
   92 COV(M,MA)=COV(MA,M)                                               PFSL0610
   99 SIGMA(M)=SQRT(COV(M,M))                                           PFSL0620
      WRITE(6,999)                                                      PFSL0630
  999 FORMAT('-WERTPAPIER-',5X,'ERWARTETE',4X,'STANDARDABWEICHUNG',4X,'KPFSL0640
     1ORREKTUR-',/4X,'NAME',9X,'RENDITE IN %',5X,18('-'),6X,'FAKTOR'//)  PFSL0650
      DO 98 M=1,ANZAHL                                                  PFSL0660
      MUE(M)= YM(M)                                                     PFSL0670
      WRITE(6,700) NAMEN(M),MUE(M),SIGMA(M),VERBEK(M)                   PFSL0680
  700 FORMAT(' ',2X,A8,F14.2,6X,F12.2,15X,F5.2)                         PFSL0690
   98 MUE(M)=MUE(M)/100.0                                               PFSL0700
      DO 801 J=1,ANZAHL                                                 PFSL0710
      DO 802 I=1,ANZAHL                                                 PFSL0720
  802 COV(I,J)=COV(I,J)/10000.0                                         PFSL0730
  801 CONTINUE                                                          PFSL0740
  699 RETURN                                                            PFSL0750
  688 WRITE(6,687) M                                                    PFSL0760
  687 FORMAT('-FEHLER IN DER NAMENSKARTE:',I3//)                        PFSL0770
      NEUDAT=9999                                                       PFSL0780
      GO TO 699                                                         PFSL0790
  677 WRITE(6,676) NAMEN(M),M                                           PFSL0800
  676 FORMAT('-FEHLER IN DER DATENKARTE:',A8,', NR.:',I3//)             PFSL0810
      NEUDAT=9999                                                       PFSL0820
      GO TO 699                                                         PFSL0830
  444 WRITE(6,555)                                                      PFSL0840
  555 FORMAT('-FEHLER IN DER KARTE, DIE DIE ANZAHL DER BETRACHTETEN WPAPFSL0850
     1IERE,'/1X,'DIE ANZAHL DER JAHRE, DIE NUMMER DER GEWUENSCHTEN EINGAPFSL0860
     2BEEINHEIT'/1X,'UND DIE OPTION, OB MATHEMATISCHER OUTPUT GEWUENSCHTPFSL0870
     3 WIRD, ENTHAELT'///)                                              PFSL0880
      GO TO 699                                                         PFSL0890
      END                                                               PFSL0900
```

Tabelle 13*: FORTRAN-IV-Programm zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ (2. Fortsetzung).

```
      SUBROUTINE STEP1                                                  PESL0910
C
C
      COMMON /AKTIE/ NAMEN                                              PESL0920
      COMMON /HUB/ COV                                                  PESL0930
      COMMON /LADEN/ MUE,WUNSCH,ANZAHL                                  PESL0940
      COMMON /UVWXYZ/ R                                                 PESL0950
      COMMON /ZAUBER/ MP1,NN,OPTION                                     PESL0960
      COMMON /HUBER/ COVL                                               PESL0970
      COMMON /TRICK/ A                                                  PESL0980
      COMMON /ACH/ MATRIX                                               PESL0990
      REAL*8 NAMEN(50)                                                  PESL1000
      REAL R(41),S(41),A(40),MUE(41),COVL(1600),MATRIX(41,41),COV(40,40)PESL1010
      INTEGER ANZAHL,OPTION,WUNSCH                                      PESL1020
       EQUIVALENCE (MUE(1),S(1))                                        PESL1030
      OPTION=WUNSCH                                                     PESL1040
      NN=41                                                             PESL1050
      MP1=ANZAHL+1                                                      PESL1060
      DO 1 K=1,ANZAHL                                                   PESL1070
    1 S(K)=MUE(K)                                                       PESL1080
      S(MP1)=0.0                                                        PESL1090
      IZ=1                                                              PESL1100
      DO 3 JJ=1,ANZAHL                                                  PESL1110
      DO 2 II=1,ANZAHL                                                  PESL1120
      IZ=IZ+1                                                           PESL1130
      IF(IZ.GT.1600) GO TO 3                                            PESL1140
    2 COVL(IZ)=COV(II,JJ)                                               PESL1150
    3 CONTINUE                                                          PESL1160
      DO 4 J=1,ANZAHL                                                   PESL1170
      R(J)=0.0                                                          PESL1180
    4 A(J)=1.0                                                          PESL1190
       R(MP1)=1.0                                                       PESL1200
      WRITE(6,12)                                                       PESL1210
   12 FORMAT('1')                                                       PESL1220
      CALL SCRIPT                                                       PESL1230
      CALL AUFBAU                                                       PESL1240
      CALL WEITER                                                       PESL1250
      RETURN                                                            PESL1260
      END                                                               PESL1270


      SUBROUTINE SCRIPT                                                 PESL1280
C
C
      COMMON /AKTIE/ NAMEN                                              PESL1290
      COMMON /HUB/ COV                                                  PESL1300
      COMMON /LADEN/ MUE,WUNSCH,ANZAHL                                  PESL1310
      COMMON /UVWXYZ/ R                                                 PESL1320
```

Tabelle 13*: FORTRAN-IV-Programm zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ (3. Fortsetzung).

```
      COMMON /ZAUBER/ MP1,NN,OPTION                                    PFSL1330
      REAL*8 NAMEN(50)                                                 PFSL1340
      REAL MUE(41),COV(40,40),R(41),S(41)                              PFSL1350
      INTEGER OPTION ,WUNSCH,ANZAHL                                    PFSL1360
       EQUIVALENCE (MUE(1),S(1))                                       PFSL1370
      DO 5 JKL=1,ANZAHL                                                PFSL1380
    5 MUE(JKL)=S(JKL)                                                  PFSL1390
      I=ANZAHL                                                         PFSL1400
      K=MP1                                                            PFSL1410
      WHILE=I/2+1                                                      PFSL1420
      DO 1 M=1,I                                                       PFSL1430
      IF(M.HILE.EQ.M) GO TO 2                                          PFSL1440
      WRITE(6,10) MUE(M),R(M),S(M),NAMEN(M)                            PFSL1450
   10 FORMAT(' ',T10,F8.4,15X,F5.1,10X,F8.4,10X,A8)                    PFSL1460
      GO TO 1                                                          PFSL1470
    2 WRITE(6,11) MUE(M),R(M),S(M),NAMEN(M)                            PFSL1480
   11 FORMAT(' ',T5,'MUE=',T10,F8.4,13X,'R=',F5.1,8X,'S=',F8.4,       PFSL1490
     *10X,A8)                                                          PFSL1500
    1 CONTINUE                                                         PFSL1510
      WRITE (6,16) R(K),S(K)                                           PFSL1520
   16 FORMAT (' ',T33,F5.1,10X,F8.4)                                   PFSL1530
      IF(OPTION.GT.1.OR.MP1.GT.15) GO TO 9                             PFSL1540
      WRITE(6,12)                                                      PFSL1550
   12 FORMAT(///' ',18 ,'KOVARIANZMATRIX:'//)                          PFSL1560
      DO 4 N=1,ANZAHL                                                  PFSL1570
      WRITE(6,13) (COV(N,MM),MM=1,ANZAHL)                              PFSL1580
   13 FORMAT (' ',T10,15F8.4)                                          PFSL1590
    4 CONTINUE                                                         PFSL1600
    9 RETURN                                                           PFSL1610
      END                                                              PFSL1620



      SUBROUTINE AUFBAU                                                PFSL1630
C
C
      INTEGER WILE,HELFF,OPTION                                        PFSL1640
      COMMON /TRICK/ A                                                 PFSL1650
      COMMON /ACH/ MATRIX                                              PFSL1660
      COMMON /ZAUBER/ MP1,NN,OPTION                                    PFSL1670
      COMMON /WUBER/ COVL                                              PFSL1680
      REAL A(40),COVL(1600),FORM(1681),MATRIX(41,41)                   PFSL1690
      EQUIVALENCE (FORM(1),MATRIX(1,1))                                PFSL1700
C     AUFBAU DER V-(MATRIX)                                            PFSL1710
      WILE=MP1*MP1                                                     PFSL1720
      DO 1 M=1,WILE                                                    PFSL1730
      HELFF=M/MP1                                                      PFSL1740
      K=HELFF*MP1                                                      PFSL1750
      IF(WILE.EQ.M) GO TO 5                                            PFSL1760
```

Tabelle 13*: FORTRAN-IV-Programm zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ (4. Fortsetzung).

```
      IF(K-M) 2,3,2                                                    PFSL1770
    3 FORM(M)=A(HELFF)                                                 PFSL1780
      GO TO 1                                                          PFSL1790
    5 FORM(M)=0.                                                       PFSL1800
      GO TO 1                                                          PFSL1810
    2 CONTINUE                                                         PFSL1820
      N=M-HELFF                                                        PFSL1830
      I=M-(MPI*HELFF)                                                  PFSL1840
      IF(K.GE.(HILF-MPI)) GO TO 4                                      PFSL1850
      FORM(M)=COVL(N)                                                  PFSL1860
      GO TO 1                                                          PFSL1870
    4 FORM(M)=A(I)                                                     PFSL1880
    1 CONTINUE                                                         PFSL1890
      HILF=HILF+1                                                      PFSL1900
      DO 10 I=1,MPI                                                    PFSL1910
      N=MPI+1-I                                                        PFSL1920
      DO 10 J=1,MPI                                                    PFSL1930
      HILF=HILF-1                                                      PFSL1940
   10 MATRIX(MPI+1-J,N)=FORM(HILF)                                     PFSL1950
      RETURN                                                           PFSL1960
      END                                                              PFSL1970


      SUBROUTINE WEITER                                                PFSL1980

      COMMON /NUMER/ COVI                                              PFSL1990
      COMMON /ACH/ MATRIX                                              PFSL2000
      COMMON /WAHL/ NPRUEF                                             PFSL2010
      COMMON /AKTIE/ NAMEN                                             PFSL2020
      COMMON /LADEN/ AUF,WUNSCH,ANZAHL                                 PFSL2030
      COMMON /UVWXYZ/ B                                                PFSL2040
      COMMON /ZAHLEN/ MPI,MN,OPTION                                    PFSL2050
      COMMON /GIFT/ HILF                                               PFSL2060
      COMMON /DUMMY/ NMAT2                                             PFSL2070
      REAL*8 NAMEN(50)  ,MNEU(41,41),HILF(41,41),NMAT2(41,41),C(41,41) PFSL2080
      REAL *4(41),S(41),P(41),COVI(1600),MATRIX(41,41),MUE(41)         PFSL2090
      INTEGER OPTION,WUNSCH,ANZAHL                                     PFSL2100
      EQUIVALENCE (COVL(1),MNEU(1,1))                                  PFSL2110
      EQUIVALENCE (C(1),NMAT2(1))                                      PFSL2120
      EQUIVALENCE (MUE(1),S(1))                                        PFSL2130
      DO 2 M=1,MPI                                                     PFSL2140
    2 P(M)=S(M)                                                        PFSL2150
      WRITE(6,12)                                                      PFSL2160
   12 FORMAT(////' ',T5,'AUSGANGSMATRIX-M:'/)                          PFSL2170
      DO 1 M=1,MPI                                                     PFSL2180
      WRITE(6,10) (MATRIX(M,N),N=1,MPI)                                PFSL2190
   10 FORMAT(' ',T2,10E13.5)                                           PFSL2200
```

Tabelle 13*: FORTRAN-IV-Programm zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ (5. Fortsetzung).

```
    1 CONTINUE                                                          PFSL2210
      CALL PRUEF(MP1,P,S,NPRUEF,NN)                                     PFSL2220
      WRITE(6,13)                                                       PFSL2230
   13 FORMAT(///)                                                       PFSL2240
      WRITE (6,11) NPRUEF,NAMEN(NPRUEF)                                 PFSL2250
   11 FORMAT (' STARTGROESSE IST DER ERTRAG NR:',I3,2X,'(',A8,')'//)    PFSL2260
      WRITE(6,13)                                                       PFSL2270
      CALL CRONE(NPRUEF,MP1,MATRIX,MNEU,NN)                             PFSL2280
      IF(OPTION.GE.1) GO TO 88                                          PFSL2290
      WRITE(6,14)                                                       PFSL2300
   14 FORMAT(' M-MATRIX MIT EINHEITSKREUZEN:'/)                         PFSL2310
      DO 3 M=1,MP1                                                      PFSL2320
    3 WRITE(6,10)(MNEU(M,N),N=1,MP1)                                    PFSL2330
      WRITE(6,13)                                                       PFSL2340
   88 CALL TRIANG(MP1,MNEU,NN)                                          PFSL2350
      IF(OPTION.GE.1) GO TO 99                                          PFSL2360
      WRITE (6,17)                                                      PFSL2370
   17 FORMAT(' KEHRMATRIX ZUR M-MATRIX:'/)                              PFSL2380
      DO 4 M=1,MP1                                                      PFSL2390
    4 WRITE(6,10) (HILF(M,N),N=1,MP1)                                   PFSL2400
      CALL MULT (MP1,MNEU,NN)                                           PFSL2410
   99 CALL STRICH (MP1,NPRUEF,NMATR,NN)                                 PFSL2420
      RETURN                                                            PFSL2430
      END                                                               PFSL2440



      SUBROUTINE PRUEF(N,WERT,SHILF,NPRUEF,NN)                          PFSL2450
C
C
      DIMENSION WERT(NN),SHILF(NN)                                      PFSL2460
      NM1=N-1                                                           PFSL2470
      DO 5 L=1,NM1                                                      PFSL2480
      K=L                                                               PFSL2490
      KP1=K+1                                                           PFSL2500
      DO 6 J=KP1,N                                                      PFSL2510
    2 IF(WERT(J)-WERT(K)) 6,6,7                                         PFSL2520
    7 K=J                                                               PFSL2530
    6 CONTINUE                                                          PFSL2540
      Z=WERT(L)                                                         PFSL2550
      WERT(L)=WERT(K)                                                   PFSL2560
    5 WERT(K)=Z                                                         PFSL2570
      DO 300 LMA=1,NM1                                                  PFSL2580
      IF(WERT(1).EQ.SHILF(LMA)) GO TO 301                               PFSL2590
      GO TO 300                                                         PFSL2600
  301 NPRUEF=LMA                                                        PFSL2610
      GO TO 302                                                         PFSL2620
  300 CONTINUE                                                          PFSL2630
  302 CONTINUE                                                          PFSL2640
```

Tabelle 13*: FORTRAN-IV-Programm zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ (6. Fortsetzung).

```
      RETURN
      END




      SUBROUTINE CRONE(NPRUEF,MP1,MATRIX,MNEU,NN)
C
C
      REAL*8 MNEU(NN,NN)
      REAL MATRIX(NN,NN)
      DO 1 KK=1,MP1
      DO 2 LL=1,MP1
    2 MNEU(KK,LL)=0.0
    1 CONTINUE
      DO 3 K=1,MP1
      MNEU(K,K)=1.0
    3 CONTINUE
      MNEU(MP1,MP1)=0.0
      MNEU(NPRUEF,NPRUEF)=DBLE(MATRIX(NPRUEF,NPRUEF))
      MNEU(MP1,NPRUEF)=DBLE(MATRIX(MP1,NPRUEF))
      MNEU(NPRUEF,MP1)=DBLE(MATRIX(NPRUEF,MP1))
      RETURN
      END



      SUBROUTINE TRIANG (MP1,MNEU,NN)
C
C
      COMMON /GIFT/ HILF
      REAL*8 MNEU(NN,NN),HILF(41,41),HHILF(1681)
      INTEGER LL(41),MM(41)
      EQUIVALENCE (HHILF(1),HILF(1,1))
      N=0
      DO 1 L=1,MP1
      DO 1 K=1,MP1
      N=N+1
    1 HHILF(N)=MNEU(K,L)
      CALL MATINV(HHILF,MP1,DET,LL,MM)
      N=MP1*MP1+1
      DO 3 LR=1,MP1
      L=MP1+1-LR
      DO 3 KR=1,MP1
      N=N-1
    3 HILF(MP1+1-KR,L)=HHILF(N)
      RETURN
      END
```

Tabelle 13*: FORTRAN-IV-Programm zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ (7. Fortsetzung).

```
      SUBROUTINE MATINV(A,N,D,L,M)                                      PFSL 3020
C
C
C     ZWECK IST ES,DIE INVERSE EINER MATRIX ZU BERECHNEN.               PFSL 3030
C     A IST DIE EINGABEMATRIX,DIE DURCH DIE BERECHNUNG ZERSTÖRT WIRD UND PFSL 3040
C     DURCH DIE BERECHNETE INVERSE ERSETZT WIRD.                        PFSL 3050
C     N IST DIE ORDNUNG DER MATRIX A.                                   PFSL 3060
C     D IST DIE SICH ERGEBENDE DETERMINANTE.                            PFSL 3070
C     L IST EIN ARBEITSVEKTOR DER LÄNGE N.                              PFSL 3080
C     M IST EIN ARBEITSVEKTOR DER LÄNGE N.                              PFSL 3090
C     ALS METHODE WIRD DIE GAUSS-JORDAN-METHODE VERWENDET.              PFSL 3100
C     IST DIE DETERMINANTE =0,DANN IST DIE MATRIX SINGULÄR.             PFSL 3110
C     WENN GENAUERE GENAUIGKEIT VERLANGT WIRD,DANN IST DAS              PFSL 3120
C     C-KOMMENTARZEICHEN VOR DER FOLGENDEN KARTE ZU ENTFERNEN.          PFSL 3130
      DIMENSION A(1),L(1),M(1)                                          PFSL 3140
      DOUBLE PRECISION A,D,BIGA,HOLD                                    PFSL 3150
C     DOUBLE PRECISION A,D,BIGA,HOLD                                    PFSL 3160
      D=1.0                                                             PFSL 3170
      NK=-N                                                             PFSL 3180
      DO 80 K=1,N                                                       PFSL 3190
      NK=NK+N                                                           PFSL 3200
      L(K)=K                                                            PFSL 3210
      M(K)=K                                                            PFSL 3220
      KK=NK+K                                                           PFSL 3230
      BIGA=A(KK)                                                        PFSL 3240
      DO 20 J=K,N                                                       PFSL 3250
      IZ=N*(J-1)                                                        PFSL 3260
      DO 20 I=K,N                                                       PFSL 3270
      IJ=IZ+I                                                           PFSL 3280
   10 IF(DABS(BIGA)-DABS(A(IJ))) 15,20,20                               PFSL 3290
   15 BIGA=A(IJ)                                                        PFSL 3300
      L(K)=I                                                            PFSL 3310
      M(K)=J                                                            PFSL 3320
   20 CONTINUE                                                          PFSL 3330
      J=L(K)                                                            PFSL 3340
      IF(J-K) 35,35,25                                                  PFSL 3350
   25 KI=K-N                                                            PFSL 3360
      DO 30 I=1,N                                                       PFSL 3370
      KI=KI+N                                                           PFSL 3380
      HOLD=-A(KI)                                                       PFSL 3390
      JI=KI-K+J                                                         PFSL 3400
      A(KI)=A(JI)                                                       PFSL 3410
   30 A(JI)=HOLD                                                        PFSL 3420
   35 I=M(K)                                                            PFSL 3430
      IF(I-K) 45,45,38                                                  PFSL 3440
   38 JP=N*(I-1)                                                        PFSL 3450
      DO 40 J=1,N                                                       PFSL 3460
      JK=NK+J                                                           PFSL 3470
      JI=JP+J                                                           PFSL 3480
      HOLD=-A(JK)                                                       PFSL 3490
```

Tabelle 13*: FORTRAN-IV-Programm zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ (8. Fortsetzung).

```
      A(JK)=A(JI)                                                       PFSL 3500
   40 A(JI)=HOLD                                                        PFSL 3510
   45 IF(SIGA) 48,45,48                                                 PFSL 3520
   46 D=0.0                                                             PFSL 3530
      RETURN                                                            PFSL 3540
   48 DO 65 I=1,N                                                       PFSL 3550
      IF(I-K) 50,65,50                                                  PFSL 3560
   50 IK=NK+I                                                           PFSL 3570
      A(IK)=A(IK)/(-SIGA)                                               PFSL 3580
   55 CONTINUE                                                          PFSL 3590
      DO 65 I=1,N                                                       PFSL 3600
      IK=NK+I                                                           PFSL 3610
      IJ=I-N                                                            PFSL 3620
      DO 65 J=1,N                                                       PFSL 3630
      IJ=IJ+N                                                           PFSL 3640
      IF(I-K) 60,65,60                                                  PFSL 3650
   60 IF(J-K) 62,65,62                                                  PFSL 3660
   62 KJ=IJ-I+K                                                         PFSL 3670
      A(IJ)=A(IK)*A(KJ)+A(IJ)                                           PFSL 3680
   65 CONTINUE                                                          PFSL 3690
      KJ=K-N                                                            PFSL 3700
      DO 75 J=1,N                                                       PFSL 3710
      KJ=KJ+N                                                           PFSL 3720
      IF(J-K) 70,75,70                                                  PFSL 3730
   70 A(KJ)=A(KJ)/SIGA                                                  PFSL 3740
   75 CONTINUE                                                          PFSL 3750
      D=D*SIGA                                                          PFSL 3760
      A(KK)=1.0/SIGA                                                    PFSL 3770
   80 CONTINUE                                                          PFSL 3780
      K=N                                                               PFSL 3790
  100 K=(K-1)                                                           PFSL 3800
      IF(K) 150,150,105                                                 PFSL 3810
  105 I=L(K)                                                            PFSL 3820
      IF(I-K) 120,120,108                                               PFSL 3830
  108 JQ=N*(K-1)                                                        PFSL 3840
      JR=N*(I-1)                                                        PFSL 3850
      DO 110 J=1,N                                                      PFSL 3860
      JK=JQ+J                                                           PFSL 3870
      HOLD=A(JK)                                                        PFSL 3880
      JI=JR+J                                                           PFSL 3890
      A(JK)=-A(JI)                                                      PFSL 3900
  110 A(JI)=HOLD                                                        PFSL 3910
  120 J=M(K)                                                            PFSL 3920
      IF(J-K) 100,100,125                                               PFSL 3930
  125 KI=K-N                                                            PFSL 3940
      DO 130 I=1,N                                                      PFSL 3950
      KI=KI+N                                                           PFSL 3960
      HOLD=A(KI)                                                        PFSL 3970
      JI=KI-K+J                                                         PFSL 3980
      A(KI)=-A(JI)                                                      PFSL 3990
```

<u>Tabelle 13*:</u> **FORTRAN-IV-Programm zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ (9. Fortsetzung).**

```
130   A(J)=H(J)
      GO TO 10
150   RETURN
      END



      SUBROUTINE MULT(MP1,VNEU,NN)
C
C
      COMMON /GIFT/ HILF
      COMMON /DUMMY/ NMATR
      REAL*8 VNEU(NN,NN),HILF(41,41),C(41,41),NMATR(41,41)
      IF(MP1.GT.10) GO TO 7
      DO 1 I=1,MP1
      DO 2 J=1,MP1
      C(I,J)=0
      DO 3 K=1,MP1
      C(I,J)=C(I,J)+VNEU(I,K)*HILF(K,J)
    3 CONTINUE
    2 CONTINUE
    1 CONTINUE
      WRITE(6,500)
  500 FORMAT('1',T6,'MATRIZENPRODUKT'/T6,15('-')//)
      DO 4 I=1,MP1
      WRITE(6,300)   (VNEU(I,J),J=1,MP1)
  300 FORMAT  (' ',10F13.5)
    4 CONTINUE
      WRITE(6,13)
   13 FORMAT(///)
      DO 5 I=1,MP1
      WRITE(6,300)   (HILF(I,J),J=1,MP1)
    5 CONTINUE
      WRITE(6,13)
      DO 6 I=1,MP1
      WRITE(6,300)   (C(I,J),J=1,MP1)
    6 CONTINUE
    7 WRITE(6,351)
  351 FORMAT('1')
      RETURN
      END



      SUBROUTINE STRICH (MP1,NPRUEF,NMATR,NN)
C
C
      COMMON /GIFT/ HILF
```

Tabelle 13*: FORTRAN-IV-Programm zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ (10. Fortsetzung).

```
      REAL*8 HILF(41,41),NMAT-(NN,NN)                                   PFSL4540
      DO 1 L=1,MP1                                                      PFSL4550
      DO 1 K=1,MP1                                                      PFSL4560
      NMAT2(L,K)=HILF(L,K)                                              PFSL4570
      IF(L.NE.NPRUEF.AND.K.NE.NPRUEF) GO TO 2                           PFSL4580
      GO TO 1                                                           PFSL4590
    2 CONTINUE                                                          PFSL4600
      IF(NMAT2(L,K).EQ.1.).AND.L.EQ.K) NMAT2(L,K)=0.0                   PFSL4610
    1 CONTINUE                                                          PFSL4620
      WRITE(6,4)                                                        PFSL4630
    4 FORMAT(' STARTMATRIX N(1):*/)                                     PFSL4640
      DO 3 M=1,MP1                                                      PFSL4650
    3 WRITE(6,10) (NMAT2(N,M),N=1,MP1)                                  PFSL4660
   10 FORMAT(' ',12,10E13.5)                                            PFSL4670
      WRITE(6,13)                                                       PFSL4680
   13 FORMAT(' ////)                                                    PFSL4690
      RETURN                                                            PFSL4700
      END                                                               PFSL4710

      SUBROUTINE STEP2                                                  PFSL4720
C
C
      COMMON /ZAUBER/ MP1,NN,OPTION                                     PFSL4730
      COMMON /ACH/ MATRIX                                               PFSL4740
      COMMON /LAGEN/ MUE,WUNSCH,ANZAHL                                  PFSL4750
      COMMON /UVWXYZ/ P                                                 PFSL4760
      COMMON /DUMMY/ NMATR                                              PFSL4770
      COMMON /HALLO/ NPRUEF                                             PFSL4780
      COMMON /AKTIE/ NAMEN                                              PFSL4790
      COMMON /GAFFE/ LAMBDA,TEST                                        PFSL4800
      COMMON /GAFF2/ TEST2                                              PFSL4810
      COMMON /KONTR/ LIMBO                                              PFSL4820
      COMMON /START/ ITER                                               PFSL4830
      COMMON /WAUWAU/ ZAHL                                              PFSL4840
      COMMON /STOP/ GRIFF,LAPR                                          PFSL4850
      LOGICAL*1 TEST(41),TEST2(41)                                      PFSL4860
      INTEGER*2 LIMIT(40)                                               PFSL4870
      INTEGER GRIFF,ZAHL,OPTION,WUNSCH,ANZAHL                           PFSL4880
      REAL*8 NMATR(41,41),NAMEN(50),X(41)                               PFSL4890
      REAL MATRIX(41,41),LAMBDA(41),LIMBO,X(41),S(41),MUE(41)           PFSL4900
      EQUIVALENCE (MUE(1),S(1))                                         PFSL4910
      LAPR=41                                                           PFSL4920
      LIMBO=99999.9E+30                                                 PFSL4930
      ZAHL=0                                                            PFSL4940
      ITER=1                                                            PFSL4950
      DO 5 L=1,NN                                                       PFSL4960
      TEST2(L)=.FALSE.                                                  PFSL4970
```

Tabelle 13*: FORTRAN-IV-Programm zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ (11. Fortsetzung).

```
    5 TEST(L)=.FALSE.                                                    PESL4820
      TEST2(NPRUEF)=.TRUE.                                               PESL4830
      TEST(NPRUEF)=.TRUE.                                                PESL4840
    3 CONTINUE                                                           PESL4850
      IF(OPTION.GE.1) GO TO 1                                            PESL4860
      WRITE(6,203)                                                       PESL4870
  203 FORMAT(///)                                                        PESL4880
      IHILF=0                                                            PESL4890
      WRITE(6,304)                                                       PESL4900
  304 FORMAT(' KRITISCHE LINIE: L')                                      PESL4910
      DO 7 L=1,ANZAHL                                                    PESL4920
      IF(.NOT.TEST(L)) GO TO 7                                           PESL4930
      IHILF=IHILF+1                                                      PESL4940
      LINIE(IHILF)=L                                                     PESL4950
    7 CONTINUE                                                           PESL4960
      WRITE(6,305) (LINIE(I),I=1,IHILF)                                  PESL4970
  305 FORMAT('+',T21,35( 1X,I2))                                         PESL4980
   76 WRITE(6,13) ITER                                                   PESL4990
   13 FORMAT(///' ITERATIONSMATRIX N(',I3,'):'/)                         PESL5000
      DO 2 J=1,MP1                                                       PESL5010
      WRITE(6,109)(SMAT2(I,J),I=1,MP1)                                   PESL5020
  109 FORMAT(' ',12E10.4)                                                PESL5030
    2 CONTINUE                                                           PESL5040
    1 CONTINUE                                                           PESL5050
      CALL HAUPT(MP1,NMATR,NN,ITER,NPRUEF)                               PESL5060
      IF(OPTION.GE.6) GO TO 8                                            PESL5070
   75 WRITE(6,6) LIMAU                                                   PESL5080
    6 FORMAT('-TATSAECHLICH BEI DER LETZTEN ITERATION BENUTZTES LAMBDA(F PESL5090
     *):',E10.4/)                                                        PESL5100
    8 IF(NPRUEF.LT.ITER.OR.LIMAU.EQ.0.0) GO TO 4                         PESL5110
      GO TO 3                                                            PESL5120
    4 RETURN                                                             PESL5130
      END                                                                PESL5140



      SUBROUTINE HAUPT(MP1,NMATR,NN,ITER,NPRUEF)                         PESL5150
C
C
      COMMON /ACH/ MATRIX                                                PESL5160
      COMMON /LAGEN/ MUE,WUNSCH,ANZAHL                                   PESL5170
      COMMON /UVWXYZ/ R                                                  PESL5180
      COMMON /ZACK/ D,F                                                  PESL5190
      COMMON /GAFFE/ LAMBDA,TEST                                         PESL5200
      COMMON /GAFF2/ TEST2                                               PESL5210
      COMMON /KONTR/ LIMAU                                               PESL5220
      COMMON /STOP/ GRIFF,LWOP                                           PESL5230
      LOGICAL*1 TEST(41),TEST2(41)                                       PESL5240
      INTEGER LWOP,GRIFF,WUNSCH,ANZAHL                                   PESL5250
```

Tabelle 13*: FORTRAN-IV-Programm zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ (12. Fortsetzung).

```
      REAL MATRIX(41,41),LAMBDA(41),LMAXL,LMAXR,R(41),S(41),LIMBO,MUE(41 PESL5260
     1)                                                                  PESL5270
      REAL*8 D(41),E(41),NMATR(NN,NN),X(41)                              PESL5280
       EQUIVALENCE (MUE(1),S(1))                                         PESL5290
      NP=1                                                               PESL5300
      CALL MULTA(MP1,D,NMATR,R,NN)                                       PESL5310
      CALL MULTA (MP1,E,NMATR,S,NN)                                      PESL5320
    2 CONTINUE                                                           PESL5330
      DO 5 IJ=1,MP1                                                      PESL5340
    5 LAMBDA(IJ)=0.0                                                     PESL5350
      CALL REINI(LMAXL,NP,MP1)                                           PESL5360
      IF(ITER.EQ.1) GO TO 6                                              PESL5370
      CALL RAUS(LMAXR,NBR,MP1,LWPR)                                      PESL5380
      IF(LMAXL.LE.0.0.AND.LMAXR.LE.0.0) GO TO 13                         PESL5390
      IF(LMAXL.LT.LMAXR) GO TO 10                                        PESL5400
    6 CONTINUE                                                           PESL5410
      TEST(NR)=.TRUE.                                                    PESL5420
      TEST2(NR)=.TRUE.                                                   PESL5430
      LWPR=NP                                                            PESL5440
      IF(LMAXL.GT.LIMBO) GO TO 2                                         PESL5450
      LIMBO=LMAXL                                                        PESL5460
      CALL MULTIP(MP1,X,NMATR,R,S,LIMBO,ITER,NN)                         PESL5470
      IF(LIMBO.EQ.0.0) GO TO 13                                          PESL5480
      GO TO 16                                                           PESL5490
   10 CONTINUE                                                           PESL5500
    4 TEST(NBR)=.FALSE.                                                  PESL5510
      LWPR=NBR                                                           PESL5520
      IF(LMAXR.GT.LIMBO) GO TO 2                                         PESL5530
      LIMBO=LMAXR                                                        PESL5540
      CALL MULTIP(MP1,X,NMATR,R,S,LIMBO,ITER,NN)                         PESL5550
      IF(LIMBO.LE.0.0) GO TO 3                                           PESL5560
      CALL KUME(LWPR,MP1,NMATR,ITER)                                     PESL5570
      GO TO 17                                                           PESL5580
   16 CALL KOLE(LWPR,MP1,NMATR,ITER)                                     PESL5590
   17 CALL MULTIP(MP1,X,NMATR,R,S,LIMBO,ITER,NN)                         PESL5600
      NORUEB=ITER                                                        PESL5610
      GO TO 14                                                           PESL5620
   13 CONTINUE                                                           PESL5630
      WRITE(6,1)                                                         PESL5640
    1 FORMAT(////' ITERATIONSPROZESS BEENDET, DA LAMBDA KLEINER ALS NULL PESL5650
     * ODER GLEICH NULL IST'///)                                         PESL5660
      NORUEB=0                                                           PESL5670
   14 RETURN                                                             PESL5680
    3 ITER=ITER+1                                                        PESL5690
      CALL MULTIP(MP1,X,NMATR,R,S,LIMBO,ITER,NN)                         PESL5700
      GO TO 13                                                           PESL5710
      END                                                                PESL5720
```

Tabelle 13*: FORTRAN-IV-Programm zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ (13. Fortsetzung).

```
      SUBROUTINE MULTA (MP1,V,MMATR,G,AP)                              PFSL5730
C
C
      REAL*8 MMATR(NP1,NP1),V(NP1)                                     PFSL5740
      REAL G(NP1)                                                      PFSL5750
      DO 1 I=1,MP1                                                     PFSL5760
      V(I)=0.000                                                       PFSL5770
      DO 3 K=1,MP1                                                     PFSL5780
      V(I)=V(I)+(MMATR(I,K)*DBLE(G(K)))                                PFSL5790
    3 CONTINUE                                                         PFSL5800
    1 CONTINUE                                                         PFSL5810
      RETURN                                                           PFSL5820
      END                                                              PFSL5830


      SUBROUTINE BEIN (LMAX,NP,MP1)                                    PFSL5940
C
C
      COMMON /ACH/ MATRIX                                              PFSL5950
      COMMON /LADEN/ MUE,WUNSCH,ANZAHL                                 PFSL5960
      COMMON /ZACK/ D,E                                                PFSL5970
      COMMON /GAFES/ LAMBDA,TEST                                       PFSL5980
      COMMON /GAFES2/ TEST2                                            PFSL5990
      COMMON /KONTR/ LIMBO                                             PFSL6000
      COMMON /START/ ITES                                              PFSL6010
      COMMON /STOP/ GWERT,LAPR                                         PFSL6020
      LOGICAL*1 TEST(41),TEST2(41)                                     PFSL6030
      REAL*8 S1,S2,E,D(41),F(41)                                       PFSL6040
      REAL LAMBDA(41),LMAX,MATRIX(41,41)                               PFSL6050
      REAL MUE(41),S(41),KTROL,LIMBO                                   PFSL6060
      INTEGER OPTION,WUNSCH,ANZAHL,GWERT                               PFSL6070
      EQUIVALENCE (MUE(1),S(1))                                        PFSL6080
      WRITE(6,4)                                                       PFSL6090
    4 FORMAT(///)                                                      PFSL6100
      KTROL=LIMBO                                                      PFSL6110
      LMAX=-1.0E-50                                                    PFSL6120
      MP=MP1-1                                                         PFSL6130
      DO 1 J1=1,MP                                                     PFSL6140
      IF(TEST(J1)) GO TO 1                                             PFSL6150
      IF(LMAX.EQ.J1) GO TO 1                                           PFSL6160
      IF(TEST2(J1)) GO TO 1                                            PFSL6170
      S1=0.000                                                         PFSL6180
      S2=1.000                                                         PFSL6190
      DO 2 J2=1,MP1                                                    PFSL6200
      H=DBLE(MATRIX(J1,J2))                                            PFSL6210
      S1=S1+H*D(J2)                                                    PFSL6220
      S2=S2+H*F(J2)                                                    PFSL6230
    2 CONTINUE                                                         PFSL6240
```

Tabelle 13*: FORTRAN-IV-Programm zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ (14. Fortsetzung).

```
      H=DBLE(S(J1)) -S2                                                 PFSL6150
      HI=SNGL(SI/H)                                                     PFSL6160
      IF(HI.LT.0.0) HI=0.0                                              PFSL6170
      LAMBDA(J1)=HI                                                     PFSL6180
      IF(HI.LE.LMAX) GO TO 1                                            PFSL6190
      KHILF=NP                                                          PFSL6200
      IF(LAMBDA(J1).GT.KTROL) GO TO 5                                   PFSL6210
      WRITE(6,3) LAMBDA(J1),J1                                          PFSL6220
    3 FORMAT(' LAMBDA(E)=',F9.4,1X,'PRUEFEN OB, REINHOLEN VON PAPIER NR:PFSL6230
     **',I2)                                                            PFSL6240
      LMAX=HI                                                           PFSL6250
      NP=J1                                                             PFSL6260
      IF(KTROL-LMAX) 5,5,1                                              PFSL6270
    6 IF(LAMBDA(J1).EQ.LAMBDA(KHILF)) CALL PRUFEE(J1,NP,LMAX,KHILF)     PFSL6280
      GO TO 1                                                           PFSL6290
    5 LMAX=LAMBDA(KHILF)                                                PFSL6300
      NP=KHILF                                                          PFSL6310
    1 CONTINUE                                                          PFSL6320
      RETURN                                                            PFSL6330
      END                                                               PFSL6340
C
C
      SUBROUTINE PRUFEE(J1,NP,LMAX,J1M1)                                PFSL6350
C
C
      COMMON /LADEN/ MUE,WUNSCH,ANZAHL                                  PFSL6360
      COMMON /GAFFE/ LAMBDA,TEST                                        PFSL6370
      LOGICAL*1 TEST(41)                                                PFSL6380
      REAL MUE(41),S(41),LMAX,LAMBDA(41)                                PFSL6390
      INTEGER WUNSCH,ANZAHL                                             PFSL6400
       EQUIVALENCE (MUE(1),S(1))                                        PFSL6410
      NP=J1                                                             PFSL6420
      IF(S(J1M1).GT.S(J1)) NP=J1M1                                      PFSL6430
      LMAX=LAMBDA(NP)                                                   PFSL6440
      RETURN                                                            PFSL6450
      END                                                               PFSL6460
C
C
      SUBROUTINE RAUS(LMAX,NP,MP1,LWPH)                                 PFSL6470
C
C
      COMMON /ACH/ MATRIX                                               PFSL6480
      COMMON /ZACK/ D,E                                                 PFSL6490
      COMMON /GAFFE/ LAMBDA,TEST                                        PFSL6500
      COMMON /KONTR/ LIMBO                                              PFSL6510
      LOGICAL*1 TEST(41)                                                PFSL6520
```

<u>Tabelle 13*:</u> **FORTRAN-IV-Programm zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ (15. Fortsetzung).**

```
      REAL*8 H,D(41),E(41)
      REAL LAMBDA(41),LMAX,MATRIX(41,41),LIMBD
      WRITE(6,4)
    4 FORMAT(///)
      TROL=LIMBD
      LMAX=-1.0E-50
      MH=MP1-1
      DO 1 J1=1,MH
      IF(J1.EQ.LWPH) GO TO 1
      IF(.NOT.TEST(J1)) GO TO 1
      IF(E(J1)) 7,8,7
    8 H=0.0D0
      GO TO 5
    7 H=-D(J1)/E(J1)
    5 HI=SNGL(H)
      IF(HI.LT.0.0) HI=0.0
      IF(HI.EQ.LIMBD) GO TO 1
      LAMBDA(J1)=HI
      IF(HI.LE.LMAX) GO TO 1
      LHILF=NR
      IF(LAMBDA(J1).GT.TROL) GO TO 9
      WRITE(6,3) LAMBDA(J1),J1
    3 FORMAT(' LAMBDA(E):',F9.4,1X,'PRUEFEN OB,AUSWERFEN VON PAPIER NR:
     *',I2)
      LMAX=HI
      NR=J1
      IF(TROL-LMAX) 9,6,1
    6 IF(LAMBDA(J1).EQ.LAMBDA(LHILF)) CALL PRUEFF(J1,NR,LMAX,LHILF)
      GO TO 1
    9 LMAX=LAMBDA(LHILF)
      NR=LHILF
    1 CONTINUE
      RETURN
      END




      SUBROUTINE MULTIP(MP1,X,NMATR,R,S,LIMBD,NN,MM)
C
C
      COMMON /AKTIE/ NAMEN
      COMMON /WAHWAH/ ZAHL
      REAL*8 NMATR(MM,MM),X(MM),NAMEN(50)
      REAL R(MM),S(MM),LIMBD,PROZEN(40),SUM(40)
      INTEGER ZAHL
      DO 1 I=1,MP1
      X(I)=0.0D0
      DO 3 K=1,MP1
      X(I)=X(I)+NMATR(I,K)*DBLE(R(K))+DBLE(LIMBD)*NMATR(I,K)*DBLE(S(K))
```

Tabelle 13*: FORTRAN-IV-Programm zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ (16. Fortsetzung).

```
    3 CONTINUE                                                          PFSL6970
      IF(I.EQ.MP1) GO TO 1                                              PFSL6980
      II=I                                                              PFSL6990
      IF(X(I)+1.0-5)  4,25,25                                           PFSL7000
   25 IF(X(I).LE.0.000) X(I)=0.000                                      PFSL7010
    1 CONTINUE                                                          PFSL7020
      CALL HILFE(MP1,X,MM,S,ERTRAG,VAR)                                 PFSL7030
      IF(MP1.GT.41) GO TO 2                                             PFSL7040
      WRITE(6,301) (NAMEN(J),J=41,50)                                   PFSL7050
  301 FORMAT('1'///T2,10A8)                                             PFSL7060
      ZAHL=ZAHL+1                                                       PFSL7070
      K=(ZAHL+1)/2                                                      PFSL7080
      WRITE(6,500) K                                                    PFSL7090
  500 FORMAT(' ' /,T2,'PORTEFEUILLEVEKTOR NR:',I2,/,T2,24('-')///)      PFSL7100
      MP1M1=MP1-1                                                       PFSL7110
      SUM(1)=0.0                                                        PFSL7120
      DO 6 L=1,MP1M1                                                    PFSL7130
      PROZEN(L)=SNGL(X(L)*100.000)                                      PFSL7140
      K=L-1                                                             PFSL7150
      IF(L.EQ.1) K=L                                                    PFSL7160
    6 SUM(L)=SUM(K)+PROZEN(L)                                           PFSL7170
      DO 4 K=1,MP1M1                                                    PFSL7180
      IF(X(K).EQ.0.000) GO TO 4                                         PFSL7190
      WRITE(6,300) X(K),K,NAMEN(K),PROZEN(K),SUM(K)                     PFSL7200
  400 FORMAT(' ',T2,'X=',F10.4,5X,'WERTPAPIER NR:',I3,2X,'(',A8,')',    PFSL7210
     *9X,F6.2,'%',5X,F6.2,'%')                                          PFSL7220
    4 CONTINUE                                                          PFSL7230
      WRITE(6,5) ERTRAG,VAR                                             PFSL7240
    5 FORMAT(//' GEWINNERWARTUNG DIESES PORTEFEUILLES:',F10.4/          PFSL7250
     *' STANDARDABWEICHUNG DES PORTEFEUILLES:',F10.4/)                  PFSL7260
      IAB=1                                                             PFSL7270
      RHILF=ERTRAG+VAR                                                  PFSL7280
      AHILF=ERTRAG-VAR                                                  PFSL7290
      WRITE(6,8) IAB,RHILF,IAB,AHILF                                    PFSL7300
    8 FORMAT('-GEWINNERWARTUNG +',I2,1X,'STANDARDABWEICHUNG:',F10.4/1X, PFSL7310
     1'GEWINNERWARTUNG -',I2,1X,'STANDARDABWEICHUNG:',F10.4)            PFSL7320
      IAB=2                                                             PFSL7330
      RHILF=RHILF+VAR                                                   PFSL7340
      AHILF=AHILF-VAR                                                   PFSL7350
      WRITE(6,11) IAB,RHILF,IAB,AHILF                                   PFSL7360
   11 FORMAT('-GEWINNERWARTUNG +',I2,1X,'STANDARDABWEICHUNGEN:',F10.4/1XPFSL7370
     1,'GEWINNERWARTUNG -',I2,1X,'STANDARDABWEICHUNGEN:',F10.4)         PFSL7380
      IAB=3                                                             PFSL7390
      RHILF=RHILF+VAR                                                   PFSL7400
      AHILF=AHILF-VAR                                                   PFSL7410
      WRITE(6,11) IAB,RHILF,IAB,AHILF                                   PFSL7420
      IF(MOD(ZAHL,2)) 30,30,2                                           PFSL7430
   30 CALL BILD(MP1M1,MM,X,PROZEN,SUM)                                  PFSL7440
    7 WRITE(6,303)                                                      PFSL7450
  303 FORMAT('1')                                                       PFSL7460
```

Tabelle 13*: FORTRAN-IV-Programm zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ (17. Fortsetzung).

```
      2 RETURN                                                          PFSL7470
      9 WRITE(6,10)                                                     PFSL7480
     10 FORMAT(////' EIN ODER MEHRERE X(I) SIND KLEINER ALS NULL,DIE NICHTPFSL7490
       *NEGATIVITAETSBEDINGUNG MUSS ABER EINGEHALTEN WERDEN. ES WIRD ABGEBPFSL7500
       *ROCHEN !')                                                      PFSL7510
         WRITE(6,16) II,X(II)                                           PFSL7520
     16 FORMAT(I4,020.8)                                                PFSL7530
         LIMBO=0.0                                                      PFSL7540
         RETURN                                                         PFSL7550
         END                                                            PFSL7560



         SUBROUTINE WURE(JO,MP1,NMATR,ITER)                             PFSL7570
C
C
         REAL*8 NMATR(41,41),NENNER                                     PFSL7580
         INTEGER DIFF                                                   PFSL7590
         ITER=ITER+1                                                    PFSL7600
         NENNER=NMATR(JO,JO)                                            PFSL7610
         DO 2 J=2,MP1                                                   PFSL7620
         JM1=J-1                                                        PFSL7630
         MINJOJ=MIN0(JO,J)                                              PFSL7640
         MAXJOJ=MAX0(JO,J)                                              PFSL7650
         DIFF=J-JO                                                      PFSL7660
         DO 2 I=1,JM1                                                   PFSL7670
         MINIJO=MIN0(I,JO)                                              PFSL7680
         MAXIJO=MAX0(I,JO)                                              PFSL7690
         IF(DIFF*(I-JO)) 9,9,8                                          PFSL7700
      9  NMATR(I,J)=0.000                                               PFSL7710
         GO TO 2                                                        PFSL7720
      8  NMATR(I,J)=NMATR(J,I)-NMATR(MAXIJO,MINIJO)*NMATR(MAXJOJ,MINJOJ)/NEPFSL7730
       *NNER                                                            PFSL7740
      2  CONTINUE                                                       PFSL7750
         DO 7 I=1,MP1                                                   PFSL7760
         IF(I-JO) 6,7,6                                                 PFSL7770
      6  MINIJO=MIN0(I,JO)                                              PFSL7780
         MAXIJO=MAX0(I,JO)                                              PFSL7790
         NMATR(I,I)=NMATR(I,I)-NMATR(MAXIJO,MINIJO)**2/NENNER           PFSL7800
      7  CONTINUE                                                       PFSL7810
         NMATR(JO,JO)=0.000                                             PFSL7820
         DO 11 I=2,MP1                                                  PFSL7830
         IM1=I-1                                                        PFSL7840
         DO 11 J=1,IM1                                                  PFSL7850
     11  NMATR(I,J)=NMATR(J,I)                                          PFSL7860
         RETURN                                                         PFSL7870
         END                                                            PFSL7880
```

Tabelle 13*: FORTRAN-IV-Programm zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ (18. Fortsetzung).

```
      SUBROUTINE HOLE(JO,MP1,NMATR,ITER)                                PESL7940
C
C
      COMMON /ACH/ MATRIX                                               PESL7950
      REAL*8 NMATR(41,41),BGR(41),RKLE,CHILE                            PESL7960
      REAL MATRIX(41,41)                                                PESL7970
      ITER=ITER+1                                                       PESL7980
      DO 1 I=1,MP1                                                      PESL7990
      BGR(I)=0.000                                                      PESL8000
      DO 2 J=1,MP1                                                      PESL8010
    2 BGR(I)=BGR(I)+NMATR(I,J)*DBLE(MATRIX(JO,J))                       PESL8020
    1 CONTINUE                                                          PESL8030
      RKLE=0.000                                                        PESL8040
      DO 3 I=1,MP1                                                      PESL8050
    3 RKLE=RKLE+BGR(I)*DBLE(MATRIX(JO,I))                               PESL8060
      CHILE=DBLE(MATRIX(JO,JO))-RKLE                                    PESL8070
      DO 4 I=1,MP1                                                      PESL8080
      DO 5 J=1,MP1                                                      PESL8090
      IF(I.NE.JO.AND.J.NE.JO)NMATR(I,J)=NMATR(I,J)+(BGR(I)*BGR(J))/CHILEPESL8100
    5 CONTINUE                                                          PESL8110
    4 CONTINUE                                                          PESL8120
      DO 6 I=1,MP1                                                      PESL8130
      IF(I.NE.JO) NMATR(I,JO)=-1.000*BGR(I)/CHILE                       PESL8140
      NMATR(JO,I)=NMATR(I,JO)                                           PESL8150
      DO 7 J=1,MP1                                                      PESL8160
      IF(I.EQ.JO.AND.J.EQ.JO) NMATR(I,I)=1.000/CHILE                    PESL8170
    7 CONTINUE                                                          PESL8180
    6 CONTINUE                                                          PESL8190
      RETURN                                                            PESL8200
      END                                                               PESL8210
```

```
      SUBROUTINE HILFE(MP1,X,NN,S,ERTRAG,VAR)                           PESL8220
C
C
      COMMON /ACH/ MATRIX                                               PESL8230
      REAL*8 X(NN)                                                      PESL8240
      REAL S(NN),ERTRAG,VAR,MATRIX(41,41)                               PESL8250
      MP1M1=MP1-1                                                       PESL8260
      ERTRAG=0.0                                                        PESL8270
      DO 1 I=1,MP1M1                                                    PESL8280
      ERTRAG=ERTRAG+SNGL(X(I)*DBLE(S(I)))                               PESL8290
    1 CONTINUE                                                          PESL8300
      VAR=0.0                                                           PESL8310
      DO 2 I=1,MP1M1                                                    PESL8320
      DO 2 J=1,MP1M1                                                    PESL8330
```

Tabelle 13*: **FORTRAN-IV-Programm zur Anwendung des Modells von MARKOWITZ (19. Fortsetzung).**

```
      VAR=VAR+SNGL(X(I)*X(J)*DBLE(VAT*IX(I,J)))                    PESL8310
    2 CONTINUE                                                     PESL8320
      VAR=SQRT(VAR)                                                PESL8330
      RETURN                                                       PESL8340
      END                                                          PESL8350



      SUBROUTINE BILDK(K,NN,X,PROZEN,SUM)                          PESL8360
C
C
      COMMON /AKTIE/ NAMEN                                         PESL8370
      REAL*8 NAMEN(50),X(NN)                                       PESL8380
      REAL PROZEN(50),SUM(50)                                      PESL8390
      INTEGER STERN/'*'/,BLANK/' '/,ZEILE(100),ZH1,ZH2             PESL8400
      DO 1 J=1,100                                                 PESL8410
    1 ZEILE(J)=BLANK                                               PESL8420
      WRITE(6,2) (NAMEN(J),J=41,50)                                PESL8430
    2 FORMAT('1',10A8)                                             PESL8440
      DO 6 J=1,K                                                   PESL8450
      ZH1=IFIX(PROZEN(J))                                          PESL8460
      IF(PROZEN(J).GT.99.01) ZH1=100                               PESL8470
      IF(ZH1) 70,70,71                                             PESL8480
   71 DO 3 ML=1,ZH1                                                PESL8490
    3 ZEILE(ML)=STERN                                              PESL8500
   70 WRITE(6,4) NAMEN(J),(ZEILE(I),I=1,100)                       PESL8510
    4 FORMAT(' ',A2,A8,2X,'|',100A1)                               PESL8520
      DO 5 LI=1,100                                                PESL8530
    5 ZEILE(LI)=BLANK                                              PESL8540
    6 CONTINUE                                                     PESL8550
      RETURN                                                       PESL8560
      END                                                          PESL8570
```

Lebenslauf

Jürgen Blaich	7261 Liebelsberg, Querweg 11.
geboren am	5.10.1939 in Stuttgart.
Staatsangehörigkeit	deutsch.
Eltern	Diplom-Ingenieur Arthur Blaich, Regierungsbaudirektor und Ehefrau Ruth, geb. Adler.
Schulen	Sept. 1945 bis Sept. 1949 Volksschulen in Kirchberg a.d.Jagst und in Stuttgart, 1949 bis 1960 Eberhard-Ludwigs-Gymnasium in Stuttgart, Juli 1956 bis April 1957 Unterbrechung des Schulbesuchs wegen Krankheit.
Reifeprüfung	25.2.1960.
Studiengang	Studium der Volkswirtschaftslehre SS 1960 an der Technischen Hochschule Stuttgart, WS 1960/61 bis einschließlich SS 1964 an der Universität München, SS 1968 bis einschließlich SS 1969 an der Universität Münster.
Studienabschluß	Diplom-Volkswirte-Prüfung am 17. Dezember 1965.
Berufspraxis	1.2.1966 bis 31.3.1968 kaufm. Angestellter der Fa. Siemens in München, 1.1.1970 bis 31.3.1970 Programmierungstätigkeiten im Rahmen eines Forschungsauftrags, ab 1.4.1970 Verwalter der Stelle eines wissenschaftlichen Assistenten am Institut für Ökonometrie und Wirtschaftsstatistik der Universität Münster.